

II. OSNOVI TEORIJE PLASTIČNOG DEFORMISANJA METALA*)

1. UVODNA OBJAŠNENJA

Ako na neki metalni deo deluje sistem spoljnih sila onda će se on deformisati. Nastala deformacija može biti samo elastična (koja nestaje posle uklanjanja sila) ili elastična i plastična (trajna). U ovom drugom slučaju, po prestanku dejstva spoljnih sila elastične deformacije takođe nestaju, ali plastične ostaju kao trajna posledica izvršenog deformisanja. Obrada metala plastičnim deformisanjem zasniva se, skoro isključivo, na ostvarenju plastičnih deformacija, jer su elastične u odnosu na njih obično znatno manje, pa se kao takve najčešće zanemaruju (elastične deformacije mogu eventualno imati značaj samo u nekim slučajevima, kao što je, na primer, slučaj savijanja metalnih delova, kada se postignut ugao između krakova savijenog dela može promeniti pod uticajem elastične deformacije—izvesno naknadno ispravljanje posle uklanjanja sile savijanja).

Poznato je da se plastično deformisanje metala obavlja putem uzajamnog pomeranja (klizanja) delova kristala u njemu. Ova pomeranja se vrše po tzv. ravnima klizanja. Kako tehnički metali i legure imaju polikristalnu strukturu, sa najrazličitijom prostornom orijentacijom pojedinih kristalita (zrna), jasno je da će i ravni klizanja u njima biti takođe različito orijentisane. Zato se plastično deformisanje pojavljuje najpre u onim zrnima koja imaju najpovoljniju orijentaciju, s obzirom na pravac delovanja spoljnih sila. Na primer, pri jednoosnom zatezanju deformisanje najpre

*) Većina zakonitosti koje će ovde biti razmatrane opšteg su karaktera i zato nisu vezane specijalno za metale, već se odnose uopšte na neprekidne sredine, zbog čega u osnovi imaju fenomenološki karakter. Međutim, kasnije će u razmatranje biti uključeno upravo deformisanje metala, pa se zato od početka može uslovno smatrati da je isključivo o njima reč.

nastaje u zrnima kod kojih ravni klizanja stoje pod uglom od 45° u odnosu na pravac delovanja sile (kasnije će biti objašnjeno zašto je to tako). Međutim, pri daljem porastu sile deformisanje se događa i u zrnima koja nemaju najpovoljniju orijentaciju, tako da se postepeno u proces uključuje sve veći broj zrna. Ona pri tome manje—više menjaju svoju prvobitnu orijentaciju, prilagođavajući se sve više pravcu najvećeg deformisanja čitavog metalnog dela. Tako se stvara orijentisana struktura (tekstura), a mehanička svojstva metala postaju zavisna od pravca (anizotropija).

Iz prednjeg proizlazi da se deformacije pojedinih zrna međusobno razlikuju. Ipak, s obzirom na postojanje veoma velikog broja zrna u strukturi metalnih delova, praktično se u okviru mehanike plastičnog deformisanja metala najčešće smatra da je deformisanje tih delova jednorodno (homogeno) i da je ostvarena deformacija adekvatna statističkoj srednjoj vrednosti deformacija pojedinih zrna. Osim toga, najčešće se zanemaruje (mada ne uvek) i anizotropija mehaničkih svojstava.

Kada deformacija dostigne neku kritičnu vrednost (u datim uslovima) dolazi do razaranja materijala. Uslovi pod kojima se to događa obično su vrlo složeni i u opštem slučaju još relativno malo izučeni. Oni nisu zavisni samo od veličine napona i deformacija u trenutku razaranja, već i od drugih činilaca kao što su: specifična svojstva materijala (uključujući i specifičnosti njegove strukturne građe), uslovi trenja na kontaktnim površinama dela, itd.

Površina dela koji se obrađuje deformisanjem može se podeliti na: kontaktnu (koja je u dodiru sa površinom alata) i slobodnu (na koju ne deluju spoljne sile). Kontaktna površine izložene su delovanju sila koje mašina preko alata prenosi na radni predmet. Ove površine su u opštem slučaju neravne. Na njim deluju, kako normalne (upravne) sile, tako i tangencijalne sile trenja, usmerene suprotno od smera deformisanja (tečenja) metala. Videće se kasnije da ove sile na kontaktnim površinama imaju izuzetan značaj pri analizi procesa obrade metala deformisanjem.

Sva naredna razmatranja zasnivaće se na pretpostavci o nepromenljivosti zapremine, jer su stvarne promene gustine metala pri plastičnom deformisanju najčešće veoma male, pa se praktično mogu zanemariti. Ova okolnost je sa stanovišta teorije plastičnosti vrlo pogodna, jer omogućuje uvođenje niza pojednostavljenih formulacija i drugih uprošćenja.

Neki osnovni pojmovi u vezi sa naponima u oblasti elastičnosti i plastičnosti mogu se izvesti već i iz rezultata standardnog ispitivanja materijala zatezanjem (koje je, inače, najprimenjeniji i višestruko pogodan vid ispitivanja materijala, na osnovu čijih se rezultata mogu izvesti znatno širi zaključci u opštem slučaju, ne-

go što je to moguće na osnovu rezultata ostalih mehaničkih ispitivanja). Neka u tom smislu bude pomenuta poznata veza između napona i deformacija u oblasti elastičnosti data Hukovim zakonom

$$\sigma = E \varepsilon$$

a u oblasti plastičnosti nelinearnom funkcijom

$$\sigma = \sigma(\varepsilon)$$

gde su: σ — normalni napon usled zatezanja; E — modul elastičnosti; ε — relativno izduženje opruvete.

Očigledno je, međutim, da poznavanje ovalke međuzavisnosti napona i deformacija ima samo ograničen značaj, odnosno da je slične odnose potrebno poznavati za slučaj složenijih napreznja (a ne samo jednoosnog), kakva se svakako najčešće sreću pri obradi metala deformisanjem. Ta problematika spada u Teoriju elastičnosti i Teoriju plastičnosti (posebne oblasti Mehanike neprekidnih sredina). Naime, da bi ponašanje metala pri plastičnom deformisanju moglo da se interpretira analitički, potrebno je, pored ostalog, da se u razmatranje uvedu mnogi pojmovi i formulacije koji zapravo proizlaze iz Teorije elastičnosti. Ovu okolnost treba dovesti u vezu sa činjenicom da se i u slučaju plastičnog deformisanja u materijalu pojavljuju naponi, a ako se pođe od tzv. malih plastičnih deformacija (što će u daljem najčešće biti slučaj) moguće je primeniti mnoge odnose za deformacije koji su izvedeni upravo za slučaj elastičnosti. Otuda veći broj narednih poglavlja, a naročito ona koja se odnose na napone i male deformacije, predstavljaju, u osnovi, izvode iz Teorije elastičnosti.

2. NAPONI I NAPONSKA STANJA

2.1. POJAM I DEFINICIJA NAPONA

Kada na neko telo deluje sistem uravnoteženih spoljnih sila, onda one u njemu izazivaju unutrašnje sile otpora, odnosno dovode do odgovarajućih unutrašnjih napona.

Ako se takvo telo (sl. 1.) preseče nekom zamišljenom ravni (proizvoljno orijentisanom) na dva dela (I i II), onda se njihovo međusobno dejstvo može predstaviti unutrašnjim silama koje, u opštem slučaju, ne moraju biti ravnomerno raspoređene po preseku A. Izdvojivši na takvom preseku malu površinu ΔA oko neke uočene tačke M, na koju deluje odgovarajuća sila ΔF , moguće je zamisliti da se ta elementarna površina beskonačno smanjuje: $\Delta A \rightarrow 0$. Pri tome se menja i sila koja na nju deluje, pa se može definisati granični odnos

$$S = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \quad (2.1.)$$

koji predstavlja napon u posmatranoj tački (po datom preseku*). Njegov pravac i veličina zavisiće, svakako, od položaja ove elementarne površine.

Istovremeno treba uočiti da se ovako definisan napon može razložiti u dve komponente, od kojih je jedna upravna na presečnu ravan A i naziva se normalni napon (σ), a druga leži u

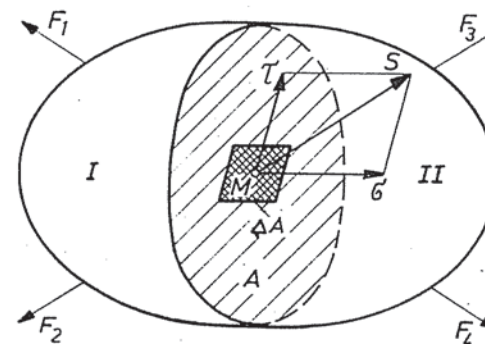
*) Napominje se da u nekom metalnom delu mogu postojati unutrašnji naponi i bez delovanja spoljnih sila. Oni su najčešće posledica neravnomernog zagrevanja ili hlađenja u prethodnom postupku obrade metala, kao i eventualnih strukturnih promena. Ovi naponi su, normalno, znatno manji od onih koji su potrebni za ostvarenje plastičnog deformisanja tela, pa se radi uprošćenja u okviru ovih teorijskih razmatranja smatra da je ono pre delovanja spoljnih sila bilo u tzv. prirodno nenapregnutom stanju.

njoj i predstavlja smičući (ili tangencijalni) napon (τ). Očigledno je da između ovih veličina postoji veza

$$S^2 = \sigma^2 + \tau^2 \quad (2.2.)$$

Prema tome, napon S se može smatrati za ukupni (opšti, potpuni, rezultujući) napon u tački po određenom preseku.

Ako se, dalje, zamisli da je presečna ravan istovremeno jedna koordinatna ravan nekog pravougaonog koordinatnog sistema, onda se i napon τ može dalje razložiti na dve komponente u ovoj ravni — u pravcu koordinatnih osa.



Sl. 1. Šematski prikaz napona u zoni (ΔA) koja okružuje jednu tačku (M) presečne površine (A)

Iz izloženog proizlazi da je napon u nekoj tački po određenom preseku vektorska veličina. Jasno je da za njegovo određivanje treba, pored ostalog, poznavati i orijentaciju površine na koju se on odnosi (što je moguće, na primer, definisanjem uglova koje normala na tu površinu zaklapa sa pravcima osa usvojenog koordinatnog sistema). Na sl. 2. su prednji odnosi prikazani šematski tako što su uvedeni još i jedinični vektori opšteg (\vec{s}), normalnog (\vec{n}) i tangencijalnog (\vec{t}) napona. To istovremeno znači da bi se ovi odnosi, kao i čitavo dalje razmatranje u vezi sa naponima, mogli izvesti i u vektorskom obliku. Na primer, bilo bi

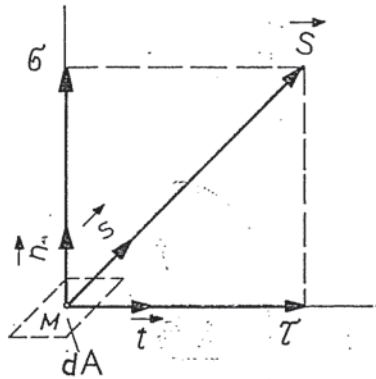
$$\vec{S} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

ili

$$\vec{S} = \sigma \vec{n} + \tau \vec{l}$$

itd.

Međutim, ova mogućnost u daljem ipak nije korišćena, bez obzira na njenu relativnu pogodnost za samu analizu, što suštinu odnosa i izvedenih zaključaka niukoliko ne menja.



Sl. 2. Vektor napona koji deluje na elementarnu površinu (ovde uslovno predstavljenu u ravni skice), njegove komponente i jedinični vektori

2.2. NAPONSKO STANJE. TENZOR NAPONA.

Stanje tela koje je izloženo dejstvu uravnoteženih spoljnih sila*) i u kome je uspostavljena unutrašnja ravnoteža elastičnih veza između pojedinih čestica materijala naziva se naponsko stanje. Očigledno je da se naponsko stanje u nekoj tački ne može u potpunosti definisati preko napred opisanog vektora napona, jer se kroz ma koju tačku u napregnutom telu može povući bezbroj različito orijentisanih ravni, tako da se u svakoj od tačaka pojavljuje beskonačno mnogo različitih normalnih i smičućih napona, koji skupa određuju prostorno naponsko stanje u posmatranoj tački. Ovo stanje treba smatrati poznatim (određenim) ako je moguće odrediti normalni i smičući napon u ma kom pravcu, odnosno za ma kako orijentisanu elementarnu površinu.

Iz ovog proizlazi da naponsko stanje nije ni skalarna veličina (određena brojem) ni vektorska (određena brojem i prav-

*) Spoljne sile uopšte mogu biti površinske (one koje deluju na površinu tela) i zapreminske (one koje deluju na sve tačke tela po njegovoj zapremini, kao što je slučaj sa težinom i silama inercije). Međutim, ovde će se uzimati u obzir samo površinske sile.

cem*), već tenzorska**). Zato se ovo stanje bliže određuje na taj način što se koriste komponente napona koje deluju na tri međusobno upravne površine paralelne ravnima jednog prostornog pravougaonog koordinatnog sistema. Naime, ako treba opisati naponsko stanje u posmatranoj tački, onda je pogodno zamisliti da kroz nju prolaze tri uzajamno upravne ravni, pri čemu u opštem slučaju na svaku od njih deluju po jedan normalan i dva smičuća napona. Da bi se ovo jasnije uočilo, zamisliće se da je oko tačke M izdvojen elementarni paralelopiped čije su stranice (sa dužinama dx, dy, dz) upravne na ose usvojenog koordinatnog sistema (sl. 3.).

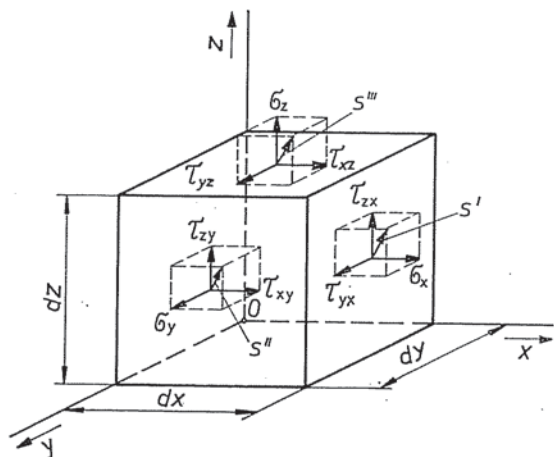
Na stranicama ovog paralelopipeda postoje, u opštem slučaju, različiti naponi ($S'; S''; S'''$). Normalni naponi (σ) deluju upravno na stranice, a smičući (τ) leže u njihovim ravnima i mogu se razložiti u dve komponente paralelne koordinatnim osama. Indeksi korišćeni pri obeležavanju na sl. 3. određuju pravac delovanja pojedinih napona u odnosu na koordinatni sistem (prvi indeks kod smičućih napona odnosi se na osu kojoj odgovara pravac napona, a drugi na onu koordinatnu osu koja stoji upravno na ravan u kojoj deluje napon; za normalne napone se zbog uprošćenja ne piše σ_{xx} , već σ_x , itd.).

Normalni naponi se smatraju za pozitivne ukoliko vrše zatezanje. Ponekada se, međutim, pri teorijskoj analizi procesa plastičnog deformisanja negativne komponente normalnih napona ($-\sigma_x; -\sigma_y; -\sigma_z$) zamenjuju pozitivnim komponentama pritiska ($p_x; p_y; p_z$) i time izbegavaju eventualne greške, odnosno olakšava rad. Znak smičućih napona zavisi od smera normalnih na posmatranoj površini paralelopipeda. Oni smičući naponi koji deluju u smeru koordinatnih osa su pozitivni ukoliko je i odgovarajući

*) Videće se iz daljeg da bi za određivanje naponskog stanja u nekoj tački bila potrebna tri vektora koji deluju na tri uzajamno upravne ravni.

***) Ne ulazeći ovde dublje u suštinu pojma i svojstava tenzora, može se pojednostavljeno reći da je uobičajeno da se tenzor napona predstavlja kao šematski (matrični) skup svih normalnih i smičućih napona koji deluju na tri uzajamno upravne površine beskonačno malog elementa zapremine. Pri tome su svi naponi (komponente tenzora) raspoređeni po određenom redosledu (sistemu). Tako oformljeni tenzori imaju svojstvo različitih matematičkih transformacija (mogu se sabirati, oduzimati, itd.) Treba istaći da se komponente tenzora pri promeni orijentacije koordinatnog sistema ne mogu menjati proizvoljno, već po određenoj zakonitosti, tako da se suštinska svojstva tenzora time ne menjaju (v. poglavlja o invarijantama). Zahvaljujući ovakvim, a i drugim osobenostima (o kojima će kasnije biti još reči), tenzori napona mogu izraziti suštinu naponskog stanja. Osim tenzora napona, u teoriji plastičnosti takođe se koriste tenzori deformacija i tenzori brzina deformacija. Za bliže upoznavanje sa svojstvima tenzora zainteresovani se upućuju na specijalizovanu literaturu koja se odnosi na tenzorski račun.

normalni napon na tu ravan pozitivan (ili negativan, ali u smeru suprotnom od pozitivnog smera koordinatne ose). Međutim, videće se kasnije da najčešće nije ni potrebno voditi računa o znaku smičućih napona.



Sl. 3. Naponi na površinama elementarnog paralelopipeda

Ovako definisane komponente napona na tri stranice paralelopipeda mogu se srediti po sledećem sistemu (šemi):

σ_x	τ_{xy}	τ_{xz}	pravac ose x
τ_{yx}	σ_y	τ_{yz}	pravac ose y
τ_{zx}	τ_{zy}	σ_z	pravac ose z
ravan upravna na x	ravan upravna na y	ravan upravna na z	

Dajući poseban smisao ovoj tablici (matrici) dobija se tenzor napona kao

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (2.3.)$$

kojim je preko devet komponentata (tri normalna napona i šest smičućih) u potpunosti definisano naponsko stanje u posmatranoj tački.

Međutim, kako je $\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ i $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ (prema zakonu o parnosti ili konjugovanosti smičućih napona), u tenzor napona stvarno ne ulaze šest različitih smičućih napona, već samo tri (dobija se tzv. simetričan tenzor napona). To znači da je naponsko stanje napregnutog elementa zapravo određeno sa šest komponentata tenzora napona: tri normalna (σ_x ; σ_y ; σ_z) i tri smičuća (τ_{xy} ; τ_{yz} ; τ_{zx}) napona. Ova međusobna jednakost parova smičućih napona proizlazi iz sledećeg razmatranja.

Da bi postojala ravnoteža sila u posmatranoj tački M (tj. da se posmatrani element zapremine ne bi okretao oko neke ose) mora, na primer, statički moment za osu z biti jednak nuli (v. sl. 3.):

$$\Sigma M_z = 0$$

$$(\tau_{xy} dx dz) dy - (\tau_{yx} dy dz) dx = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Takođe se iz izjednačavanja statičkih momenata za druge dve ose dobija

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

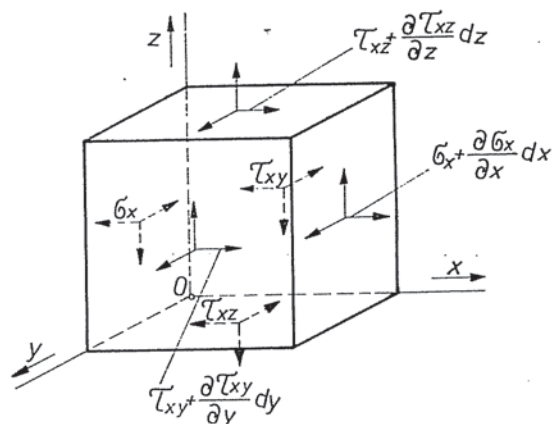
Pri postavljanju ovih momentnih jednačina pretpostavljeno je da na suprotne strane paralelopipeda deluju isti normalni naponi, samo sa suprotnim smerom, tako da njihove momente nema potrebe ni ispisivati (oni se potiru). Međutim, iz sledećeg poglavlja i sl. 4. vidi se da između ovih napona ipak postoje male diferencijalne razlike. Ali kada se one pomnože sa, takođe diferencijalno malim, rastojanjem od ose dobijaju se beskonačno male veličine višeg reda koje se mogu zanemariti.

Napomena:

u mehanici neprekidnih sredina često se ispisivanje simbola za napone unekoliko pojednostavljuje time što se i za normalne i za smičuće napone koristi simbol σ , a razlike između njih proizlaze iz korišćenih indeksa. Naime, za normalne napone bilo bi: σ_{xx} ; σ_{yy} ; σ_{zz} ; a za smičuće: σ_{xy} ; σ_{yz} ; σ_{zx} , tako da bi opšta oznaka napona bila $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, a ona se takođe može koristiti i kao opšti skraćeni simbol za tenzor napona ($T_{\sigma} = \sigma_{ij}$). što pojednostavljuje ispisivanje.

2.3. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE RAVNOTEŽE

Naponi u napregnutom telu su neprekidne funkcije koordinaata, tj. komponente napona se, u opštem slučaju, menjaju od tačke do tačke, pa je od posebnog interesa maći njihov raspored po čitavom telu. Na sl. 4. su naznačeni naponi koji deluju na samo tri ravni elementarnog paralelopipeda. Na ostale tri ravni takođe deluju naponi koji su suprotnog znaka od prikazanih i razlikuju se po veličini od njih za odgovarajuće diferencijalne iznose. Ovo je na slici prikazano samo za naponne koji deluju u pravcu ose x , a po analogiji isto važi i za ostale komponente normalnih i smičućih napona (v. i sl. 3.).



Sl. 4. Razlike u naponima koji deluju na dve suprotne strane elementarnog paralelopipeda

Iz uslova da suma svih sila u pravcu pojedinih koordinatnih osa mora biti jednaka nuli mogu se dobiti odgovarajuće diferencijalne jednačine ravnoteže. Na primer, u pravu ose x biće

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy dz - \sigma_x dy dz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right) dx dz - \tau_{xy} dx dz + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz\right) dx dy - \tau_{xz} dx dy = 0$$

Odnosno

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

Na sličan način dobijaju se i jednačine ravnoteže u pravcu osa y i z ($\Sigma F_y = 0$ i $\Sigma F_z = 0$), pa se konačno može napisati sledeći sistem diferencijalnih jednačina ravnoteže:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (2.4.a)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (2.4.b)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (2.4.c)$$

Ove se jednačine mogu izraziti i u cilindričnim ili sfernim koordinatama.

Naročito su pri rešavanju nekih problema pogodne cilindrične koordinate: r , θ , z (sl. 5.). Ako se na ove koordinate projektuju sile koje deluju na prostorni element, čije su bočne površine određene dužinama dr i dz , a ugao između njih je $d\theta$ onda se dobija:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (2.5.a)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad (2.5.b)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \quad (2.5.c)$$

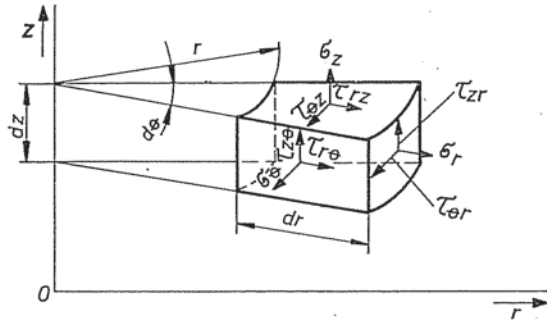
gde su: σ_r ; σ_θ i σ_z — normalni naponi u radijalnom, tangencijalnom i aksijalnom pravcu.

Ovako definisani naponi takođe mogu biti komponente tenzora napona, koji tada ima oblik

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (2.6.)$$

Za slučaj osno-simetričnog naponskog stanja komponente napona ne zavise od koordinate θ , a u ravninama koje prolaze kroz osu z nema smičućih napona ($\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 0$) pa je tenzor napona

$$T_{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_r & 0 & \tau_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta} & 0 \\ \tau_{zr} & 0 & \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (2.7.)$$



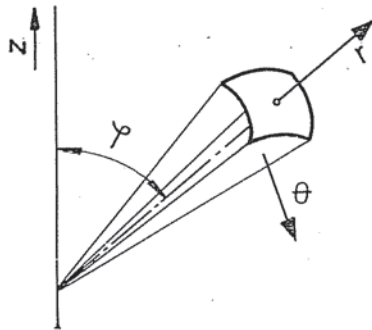
Sl. 5. Naponi na površini elementarnog tela u cilindričnom koordinatnom sistemu

Ukoliko se koriste sferne koordinate: r, φ, θ (sl. 6.), onda će diferencijalne jednačine ravnoteže biti

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (2\sigma_r - \sigma_{\varphi} - \sigma_{\theta} + \tau_{r\varphi} \cotg \varphi) = 0 \quad (2.8.a)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} [(\sigma_{\varphi} - \sigma_{\theta}) \cotg \varphi + 3\tau_{r\varphi}] = 0 \quad (2.8.b)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (3\tau_{r\theta} + 2\tau_{\theta\varphi} \cotg \varphi) = 0 \quad (2.8.c)$$



Sl. 6. Sferne polarne koordinate koje se mogu koristiti pri izražavanju naponskog stanja u nekoj tački i postavljanju diferencijalnih jednačina ravnoteže

Ako postoji sferna simetrija biće:

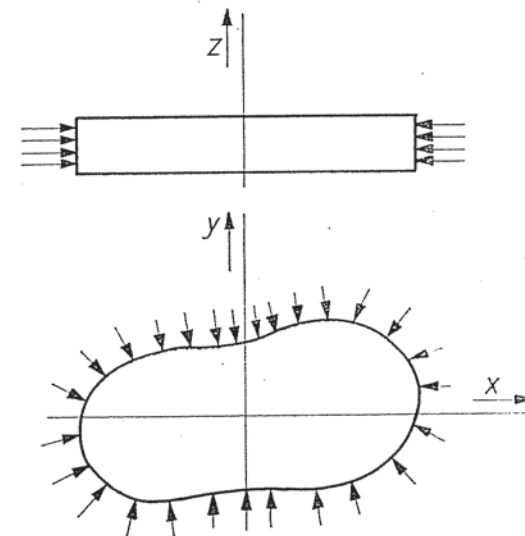
$$\tau_{r\theta} = \tau_{r\varphi} = \tau_{\theta\varphi} = 0 \quad \text{i} \quad \sigma_{\theta} = \sigma_{\varphi} \quad \text{pa se dobija}$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_{\theta}) = 0 \quad (2.9.a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (2.9.b)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\varphi}}{\partial \varphi} = 0 \quad (2.9.c)$$

Prednje jednačine moraju ispuniti granične uslove na slobodnim i kontaktnim površinama tela (potrebno je da su ti uslovi poznati). Njihovim rešavanjem bi li određeni naponi u ma kojoj tački tela. Međutim, vidi se da ove tri diferencijalne jednačine sadrže šest nepoznatih, pa bi za njihovo rešavanje očigledno bili neophodni dopunski uslovi (na primer, uslovi definisani tzv. jednačinama plastičnosti, i dr.). Ali, bez obzira na principijelnu mogućnost takvih rešenja, praktično se do njih teško dolazi s obzirom na teškoće matematičke prirode. Stoga se pribegava ranije pomenutim uprošćenjima, ukoliko je to moguće (v. poglavlje 11.1. o »inženjerskoj metodi« dobijanja približnih rešenja). Znatna uprošćenja jednačina ravnoteže nastaju sama po sebi u takvim sluča-



Sl. 7. Šema delovanja spoljnih sila koje izazivaju ravansko naponsko stanje

jevima kao što je deformisanje osno-simetričnih delova, ili kada je naponsko stanje ravansko (sl. 7.), odnosno kada se može približno takvim smatrati.

Naime, u nekim slučajevima obrade naprezanje dela se vrši u jednoj ravni — ravnansko naponsko stanje, pri čemu komponente napona zavise samo od dve koordinate (u ravni upravnoj na treću koordinatu naponi su jednaki nuli). Napominje se da pri tome u pravcu treće ose postoji deformacija (v. kasnije izlaganje o deformacionim stanjima). Ukoliko, međutim, ne postoji deformacija u pravcu treće ose, onda ovaj napon ne može biti jednak nuli i to je tzv. ravansko deformaciono stanje koje, dakle, treba razlikovati od naponskog.

Primer ravanskog naponskog stanja prikazan je šematski na sl. 7.

Više pojedinosti o ovim stanjima, kao i jednačine ravnoteže koje im odgovaraju daće se u poglavlju pod nazivom »Ravanski problem« (11.1.1).

U svakom slučaju, jednačine ravnoteže imaju fundamentalni značaj, jer generalno definišu napone u svim tačkama (po čitavoj zapremini) napregnutog tela, ali za sada još ne postoji praktična mogućnost njihovog korišćenja, odnosno rešavanja u svim slučajevima.

2.4. GLAVNI NORMALNI NAPONI

Kroz jednu tačku u napregnutom telu uvek se mogu povući tri međusobno upravne ravni u kojima nema smičućih napona ($\tau = 0$), tj. u kojima deluju samo normalni naponi (ili su eventualno i neki od njih jednaki nuli).

Ovi naponi se nazivaju glavni normalni naponi. Ako se koordinatni sistem postavi tako da se pravci osa poklapaju sa pravcima tih napona, onda će na koordinatne ravni delovati samo ovi — glavni normalni naponi. Za razliku od opštih oznaka za normalne napone, glavni se obeležavaju indeksima 1, 2, 3 (to su oznake glavnih osa — umesto x, y, z), tj. kao: $\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3$. Pri tome se usvaja da je algebarski

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

(imajući dakle, u vidu da su zatežućii naponi > 0 , a pritiskujućii < 0).

Neka na ovom mestu bude samo napomenuto da plastično deformisanje ne bi ni bilo moguće ako bi sva tri glavna normalna napona bila ista po znaku i veličini — ravnomerno svestrano zatezanje ili pritiskivanje (ovo će kasnije biti bliže objašnjeno).

Iz izloženog proizlazi da je naponsko stanje u jednoj tački određeno ukoliko su poznati glavni normalni naponi i pravci glavnih osa. Time je čitav naponski sistem redukovao na tri međusobno upravna napona, što najčešće značno pojednostavljuje rešavanje problema.

U opštem slučaju su pravci glavnih osa različiti u raznim tačkama tela koje se deformiše. Ipak, u mnogim slučajevima obrade metala deformisanjem može se približno smatrati da su pravci ovih osa isti u svim tačkama tela, što takođe pojednostavljuje analizu procesa deformisanja i iznalaženje potrebnih rešenja.

Sa ovim komponentama biće tenzor napona

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

2.5. GLAVNI SMİČUĆI (TANGENCIJALNI) NAPONI

Korisno je da se, pored glavnih normalnih, definišu i glavni smičućii naponi. To su oni smičućii naponi u posmatranoj tački koji imaju ekstremne apsolutne veličine (uključujući naravno i maksimalni smičućii napon u čitavom sistemu), a deluju u ravnima od kojih je svaka upravna na jednu glavnu koordinatnu ravan, a sa druge dve zaklapa ugao od 45° (ili, drugim rečima, u ravnima od kojih svaka prolazi kroz jednu glavnu osu i zaklapa ugao od 45° sa druge dve ose). Može se dokazati da takvih ravni ima 6 (ako se one postave oko posmatrane tačke tako da formiraju geometrijski pravilno telo—dodekaedar, onda će se pojaviti po dve ravni sa istom orijentacijom, pa će takvo telo imati ukupno 12 ravnih površina). Šematski prikaz položaja ovih ravni i odgovarajućih glavnih smičućih napona dat je na sl. 8.

S obzirom na ranije oznake, biće glavni smičućii naponi:

$\tau_{12}; \tau_{23}; \tau_{31}$, pri čemu indksi označavaju da napon deluje u ravni koja je u odnosu na te glavne ose postavljena pod uglom od 45° (na primer, 1 i 2 za τ_{12})*.

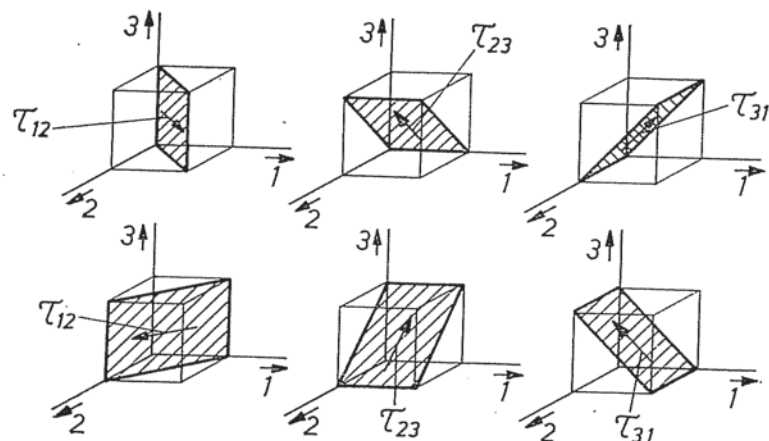
Može se dokazati (na primer, postavljanjem jednačina ravnoteže, kao što će to kasnije biti pokazano) da su odnosi između glavnih smičućih i normalnih glavnih napona sledeći

* Značenje ovih indeksa može se shvatiti i nešto drukčije, tj. kao pokazatelja onih glavnih normalnih napona čijoj je polurazlici jednak taj smičućii napon (v. izraze 2.11. za $\tau_{12}; \tau_{23}$ i τ_{31}).

$$\tau_{12} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (2.11.a)$$

$$\tau_{23} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) \quad (2.11.b)$$

$$\tau_{31} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_3 - \sigma_1) \quad (2.11.c)$$



Sl. 8. Ravni u kojima smičući naponi imaju ekstremne iznose (glavni smičući naponi)

tj. glavni smičući naponi su jednaki polurazlici odgovarajućih glavnih normalnih napona.

Dalje je

$$\tau_{12} + \tau_{23} + \tau_{31} = 0 \quad (2.12.)$$

Zbog $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ biće smičući napon τ_{31} najveći ($\tau_{31} = \tau_{\max}$) i jednak polurazlici algebarski najvećeg i najmanjeg glavnog normalnog napona.

Na površinama u kojima deluju glavni smičući naponi takođe deluju i odgovarajući normalni naponi čiji se iznos može ustanoviti niže prikazanim postupkom određivanja napona na nagnutim (kosim) ravnima (2.7.), pri čemu se dobija

$$\sigma_{12} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad (2.13.a)$$

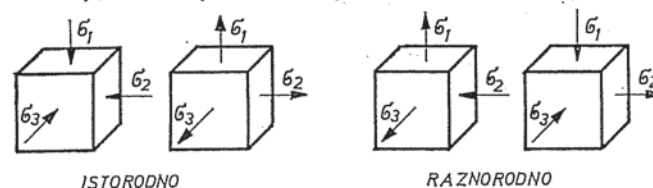
$$\sigma_{23} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \quad (2.13.b)$$

$$\sigma_{13} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (2.13.c)$$

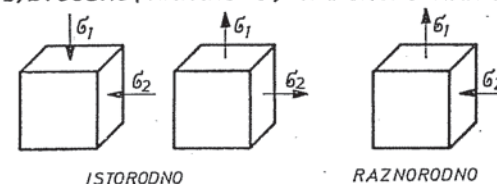
2.6. VRSTE NAPONSKIH STANJA I NJIHOVE MEHANIČKE ŠEME

Naponska stanja koja nastaju pri različitim vidovima deformisanja mogu se pregledno predstaviti odgovarajućim šemama glavnih normalnih napona. Ovakve šeme zapravo prikazuju pravce i smerove glavnih normalnih napona koji se javljaju u posmatranom procesu, ali ništa ne govore o njihovoj veličini (sl. 9.).

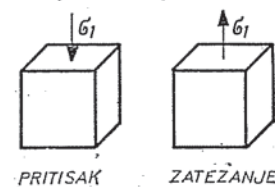
a) TROOSNO (PROSTORNO) NAPONSKO STANJE



b) DVOOSNO (RAVANSKO) NAPONSKO STANJE



c) JEDNOOSNO (LINJSKO) NAPONSKO STANJE

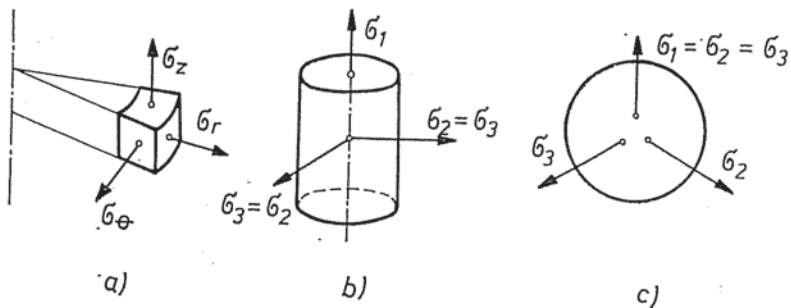


Sl. 9. Mehaničke šeme naponskih stanja

Od devet mogućih šema četiri se odnose na prostorna ili zapreminska naponska stanja (sva tri glavna napona su različita od nule), tri na ravanska ili dvoosna (jedan od glavnih napona jednak je nuli) i dva na linijska ili jednoosna (dva glavna napona su jednaka nuli).

Takođe se razlikuju šeme jednorodnih (istovrskih) napona — kada su sva tri glavna napona istog znaka (takvih šema ima šest) i raznorodnih (raznovrskih) — kada su naponi različiti po znaku (ima tri takve šeme).

Osim prikazivanja naponskih stanja pomoću koordinata pravougaonog koordinatnog sistema, može se u specijalnim slučajevima to isto učiniti na pogodniji način korišćenjem šema za tzv. cilindarsko i sferno naponsko stanje (sl. 10.).



Sl. 10. Mehaničke šeme specijalnih naponskih stanja:
a) b) — cilindarskog; c) — sfernog

Na taj način, prikazane šeme glavnih normalnih napona postaju veoma jednostavni i pregledni klasifikatori naponskih stanja.

Vrsta naponskog stanja ima bitan uticaj na plastičnost metala i njegov deformacioni otpor. Načelno posmatrano, ukoliko u šemi prevladavaju (tj. ukoliko su uticajniji) naponi pritiska, utoliko se materijal može smatrati pogodnijim za plastično deformisanje i obratno (više pojedinosti o ovome daće se kasnije — u poglavlju 10.). Dalje, jednorodni glavni normalni naponi dovode do većeg otpora deformisanju, tako da je on najveći u slučaju svestranog pritiska ili zatezanja.

Ukoliko je metal manje plastičan, utoliko treba više nastojati da se primeni povoljnija šema glavnih napona. Na primer, plastičnost se pri kovanju može poboljšati ako se slobodno kovanje zameni kovanjem u kalupima koji ograničavaju bočno tečenje (pояvljuju se bočni pritisci, odnosno naponi — pored napona u pravcu kretanja čekića).

U najvećem broju slučajeva pri obradi metala deformisanjem spoljne sile izazivaju u radnom predmetu prostorno ili ravansko naponsko stanje, a ređe linijsko. Osim toga, češći su slučajevi raznorodnog nego jednorodnog naponskog stanja.

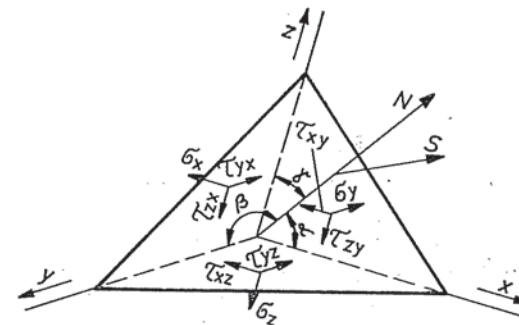
2.7. NAPONI NA NAGNUTOJ (KOSOJ) RAVNI

Napred je konstatovano da naponi u tri uzajamno upravne ravni koje prolaze kroz jednu tačku u potpunosti određuju naponsko stanje. Osim toga, ako su poznati naponi u te tri ravni, onda se

mogu naći komponente napona na ma kojoj ravni proizvoljno orijentisanoj u prostoru ako ona prolazi takođe kroz tu tačku. Može se приметiti da iz prve konstatacije ova druga mogućnost proizlazi sama po sebi, jer ako je naponsko stanje u potpunosti određeno, onda to mora značiti da se naponi za ma koju ravan kroz tu tačku mogu izračunati.

Drugim rečima, naponsko stanje u nekoj tački jednoznačno je određeno ako je moguće da se iz komponentata napona: σ_x ; σ_y ; σ_z ; τ_{xy} ; τ_{yz} ; τ_{xz} izračuna ukupni napon S za ma koju presečnu ravan. To se može dokazati.

Na sl. 11. je prikazana jedna takva ravan, koja sa koordinatnim ravnima formira elementarni tetraedar, pa se mogu postaviti jednačine njegove ravnoteže.*)



Sl. 11. Šematski prikaz napona na nagnutoj ravni i koordinatnim ravnima, tj. na površinama elementarnog tetraedra

Ako je N normala na nagnutu površinu, onda se njen položaj može odrediti kosinusima pravaca:**)

$$\cos \alpha = \cos (N, x) = a_x$$

$$\cos \beta = \cos (N, y) = a_y$$

$$\cos \gamma = \cos (N, z) = a_z$$

pri čemu je očigledno

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1$$

*) Strogo posmatrano, ovako prikazana nagnuta ravan ne prolazi kroz posmatranu tačku, ali ako se formirani tetraedar beskonačno smanjuje, onda će u graničnom slučaju nagnuta površina proći kroz tu tačku.

***) Uopšte je položaj ma koje ravni koja prolazi kroz posmatranu tačku pogodno određen uglovima koje normala na nju zaklapa sa pozitivnim pravcima koordinatnih osa.

Neka je ΔA nagnuta površina, a površine ostalih strana tetraedra: $\Delta A_x; \Delta A_y; \Delta A_z$ i neka su poznati naponi na njima (tj. na koordinatnim ravninama). Kada na nagnutu površinu deluje ukupan napon (vektor) S , proizvoljno orijentisan, biće njegove komponente u pravcu koordinatnih osa: $S_x; S_y; S_z$. Sa ovim oznakama biće jednačine ravnoteže

$$S_x \Delta A - \sigma_x \Delta A_x - \tau_{xy} \Delta A_y - \tau_{xz} \Delta A_z = 0$$

$$S_y \Delta A - \tau_{yx} \Delta A_x - \sigma_y \Delta A_y - \tau_{yz} \Delta A_z = 0$$

$$S_z \Delta A - \tau_{zx} \Delta A_x - \tau_{zy} \Delta A_y - \sigma_z \Delta A_z = 0$$

Dalje je

$$\Delta A_x = \Delta A a_x; \Delta A_y = \Delta A a_y; \Delta A_z = \Delta A a_z$$

pa će biti

$$S_x = \sigma_x a_x + \tau_{xy} a_y + \tau_{xz} a_z \quad (2.14.a)$$

$$S_y = \tau_{yx} a_x + \sigma_y a_y + \tau_{yz} a_z \quad (2.14.b)$$

$$S_z = \tau_{zx} a_x + \tau_{zy} a_y + \sigma_z a_z \quad (2.14.c)$$

Ovaj sistem predstavlja tzv. Košijeve (Cauchy) jednačine ili uslove na konturi (konturne uslove).

Napomena: s obzirom da koeficijenti pravaca u ovim jednačinama mogu imati najrazličitije iznose, to proizlazi da nagnuta površina dobija u opštem slučaju najrazličitije orijentacije. Zato se može takođe smatrati da ove jednačine predstavljaju na izvestan način vezu između unutrašnjih napona i onih na površini — tzv. konturni uslovi (granični uslovi na konturi), koji se mogu koristiti kao granični uslovi pri integrisanju diferencijalnih jednačina ravnoteže. Značaj ovih napona može se uočiti, pored ostalog, na primeru kovanja metala u kalupima, kada je dodir sa alatom — u kovačkoj gravuri — na pojedinim mestima ostvaren najčešće preko različito orijentisanih (nagnutih) elementarnih površina.

Jasno je da se komponente S_x, S_y i S_z mogu slagati kao vektori, jer deluju na jednu istu površinu:

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$$

Prema tome, ako su poznati naponi na tri uzajamno upravne ravni koje prolaze kroz jednu tačku, naponsko stanje je u potpunosti određeno, a takođe su time određeni i naponi u ma kojoj nagnutoj ravni (koja prolazi kroz istu tačku (pod pretpostavkom da je orijentacija ove ravni poznata).

Kada je naponsko stanje u nekoj tački definisano preko glavnih napona, onda će komponente ukupnog napona u nagnutoj ravni koja prolazi kroz tu tačku biti

$$S_1 = \sigma_1 a_1; S_2 = \sigma_2 a_2; S_3 = \sigma_3 a_3 \quad \checkmark$$

a njegov kvadrat

$$S^2 = \sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2 + \sigma_3^2 a_3^2 \quad (2.15)$$

gde se indeksi 1, 2, 3 odnose na glavne ose, jer po definiciji u glavnim koordinatnim površinama nema smičućih napona.

Posle elementarnih transformacija mogu se prednje među-zavisnosti prikazati i u nešto drukčijem vidu.

Naime, normalni napon σ u ma ikako orijentisanoj ravni određen je projekcijom vektora ukupnog napona S na normalu N . Sa druge strane, veličina ove projekcije takođe odgovara i zbiru projekcija komponentata $S_x; S_y; S_z$ vektora S na istu normalu. Stoga se može pisati

$$\sigma = S_x a_x + S_y a_y + S_z a_z$$

a kada se umesto S_x, S_y, S_z uvrste izrazi dati sistemom jednačina (2.14.), dobija se

$$\sigma = \sigma_x a_x^2 + \sigma_y a_y^2 + \sigma_z a_z^2 + 2\tau_{xy} a_x a_y + 2\tau_{yz} a_y a_z + 2\tau_{zx} a_z a_x \quad (2.16)$$

odnosno za glavne ose

$$\sigma = \sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2 \quad \checkmark \quad (2.17)$$

Posle ovoga nije teško dobiti i izraz za smičući napon u toj ravni, jer je prema (2.2.)

$$\tau = \sqrt{S^2 - \sigma^2}$$

$$\tau^2 = S^2 - \sigma^2 = \sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2 + \sigma_3^2 a_3^2 - (\sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2)^2 \quad (2.18)$$

Ako se zamisli da je izvršena rotacija sistema x, y, z u novi položaj pa je dobijen novi sistem x', y', z' i to tako da se pravac nove ose x' poklopi sa pravcem normale na nagnutu površinu, onda će normalni napon za tu površinu biti

$$\sigma = \sigma_{x'} = S_x a_x + S_y a_y + S_z a_z$$

a smičući naponi (koji sada deluju u ravni y', z')

$$\tau_{x'y'} = S_x \cos(y', x) + S_y \cos(y', y) + S_z \cos(y', z)$$

$$\tau_{z'x'} = S_x \cos(z', x) + S_y \cos(z', y) + S_z \cos(z', z)$$

Korisno je pri ovome napomenuti da su naponske komponente i prvobitnog i novog rotiranog sistema istovremeno komponente jednog istog tenzora, s tim što jedne proizilaze iz drugih posle potpuno određenih transformacija, kao što se to iz prednjeg

može zaključiti. Ova okolnost ima svoje objašnjenje u činjenici da tenzor napona, kao pokazatelj naponskog stanja, ne može ni zavisiti od rotacije koordinatnog sistema, jer ova rotacija, kao isključivo matematička operacija, nikako ne može promeniti suštinu naponskog stanja u njegovom fizičkom smislu. To znači da bi se u ovom slučaju naponsko stanje u posmatranoj tački moglo izraziti dvojako: ili preko tenzora

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

ili

$$T'_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'} & \sigma_{z'} \end{pmatrix}$$

Bliža objašnjenja u vezi sa istovetnim fizičkim smislom ova dva tenzora daće se u narednom poglavlju.

Izvedene zavisnosti imaju opšti karakter. U specijalnim slučajevima one se mogu pojednostaviti a i posebno izvesti, što se jašno može zaključiti iz sledećeg razmatranja.

Poznato je da su za nastanak plastičnih deformacija od posebnog značaja iznosi najvećeg i najmanjeg glavnog normalnog napona (v. poglavlje 5.3.), dok je uticaj srednjeg napona znatno manji i, radi uprošćenja, pri rešavanju niza praktičnih zadataka može se zanemariti. Time se slučaj svodi na ravansko (dvoosno) naponsko stanje. Na sl. 12. su prikazani naponi koji deluju na neku proizvoljno orijentisanu ravnu površinu za slučaj ovakvog ravanskog naponskog stanja. Naime, smatra se, u skladu sa usvojenim obeležavanjem, da je σ_1 najveći glavni normalni napon, a σ_3 najmanji.

Ukupan napon S deluje na elementarnu površinu ΔA , čija je orijentacija u odnosu na glavne ose određena uglom α (na sl. 12. ova površina je uslovno označena kao dužina, jer se može zamisliti da je njena širina jednaka jedinici).

Jednačine ravnoteže u pravcu glavnih osa biće

$$\sigma \Delta A \cos \alpha - \sigma_1 \Delta A \cos \alpha + \tau \Delta A \sin \alpha = 0 \quad (\text{za pravac 1})$$

$$\sigma \Delta A \sin \alpha - \sigma_3 \Delta A \sin \alpha - \tau \Delta A \cos \alpha = 0 \quad (\text{za pravac 3})$$

Kako je

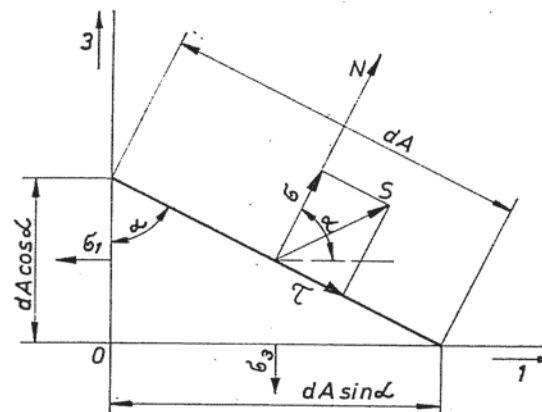
$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

dobija se

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha \quad (2.19.)$$

$$\tau = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha \quad (2.20.)$$



Sl. 12. Naponi koji deluju na proizvoljno orijentisanu ravnu površinu ΔA

Napomena:

Jasno je da se do istih izraza može doći i primenom napred izvedenih opštih izraza za σ i τ (2.17. i 2.18.). Naime, u ovom slučaju bi bilo: $a_1 = \cos \alpha$; $a_3 = \sin \alpha$ i

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 a_1^2 + \sigma_3 a_3^2 = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha = \\ &= \sigma_1 \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \sigma_3 \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha \end{aligned}$$

a slično se može pokazati i za τ .

Iz jednačine (2.20.) može se neposredno zaključiti da će uopšte međusobno upravni normalni naponi koji deluju na površine nekog elementa zapremine (na primer, elementarnog kuba) izazvati u njemu smičuće napone i to u ravnima koje su nagnute u odnosu na površine elementa, odnosno pravce normalnih napona. Ako su ove ravni nagnute tako da su im dva koef. pravca jednaki $\pm 2/2$ a treći jednak nuli, onda će se u njima javiti ekstremni — glavni smičući naponi čiji su izrazi (sva tri) navedeni ranije (polurazlike odgovarajućih glavnih normalnih napona) — jednačine (2.11.).

Očigledno je da će smičući napon biti maksimalan pri $\tau = 45^\circ$, kako je napred već naglašeno (a ovdje dokazano). On je ujedno glavni smičući napon u posmatranom sistemu i iznosi

$$\tau_{\max} = \tau_{13} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \quad (2.21.)$$

dok je normalni napon u toj ravni

$$\sigma_{13} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

što je u prethodnom poglavlju takođe navedeno (jedin. 2.13.).

Pošto u procesu plastičnog deformisanja nema značaja znak smičućeg napona, već samo njegov apsolutni iznos, to je pogodnije pisati

$$|\tau_{\max}| = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} \quad (2.22.)$$

2.8. INVARIJANTE TENZORA NAPONA

Ako se pođe od pretpostavke da na nagnutu površinu prikazanog elementarnog tetraedra deluje samo normalni napon $S = \sigma$, onda će ona u tom slučaju biti glavna. Komponente ovog napona u pravcu ose x, y, z biće

$$S_x = \sigma a_x; \quad S_y = \sigma a_y; \quad S_z = \sigma a_z$$

jer se njihov pravac poklapa sa pravcem normale na površinu, čiji su koeficijenti pravaca a_x, a_y, a_z .

Zamenjujući ove izraze u jednačinama (2.14.) za S_x, S_y, S_z , dobija se

$$\sigma a_x = \sigma_x a_x + \tau_{xy} a_y + \tau_{xz} a_z$$

$$\sigma a_y = \tau_{yx} a_x + \sigma_y a_y + \tau_{yz} a_z$$

$$\sigma a_z = \tau_{zx} a_x + \tau_{zy} a_y + \sigma_z a_z$$

odakle proizlazi

$$(\sigma_x - \sigma) a_x + \tau_{xy} a_y + \tau_{xz} a_z = 0 \quad (2.23.a)$$

$$\tau_{yx} a_x + (\sigma_y - \sigma) a_y + \tau_{yz} a_z = 0 \quad (2.23.b)$$

$$\tau_{zx} a_x + \tau_{zy} a_y + (\sigma_z - \sigma) a_z = 0 \quad (2.23.c)$$

Dobijen je, dakle, sistem jednačina po a_x, a_y, a_z .

Koreni tog sistema linearnih homogenih jednačina (jer su slobodni članovi jednaki nuli) određuju glavne napone, dok trivijalno rešenje

$$a_x = a_y = a_z = 0$$

ne odgovara uslovu

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1$$

Stoga determinanta koeficijenata sistema mora biti jednaka nuli (što uopšte važi za sisteme homogenih jednačina koje nemaju trivijalno rešenje):

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Razvijanjem determinante dobija se kubna jednačina po σ :

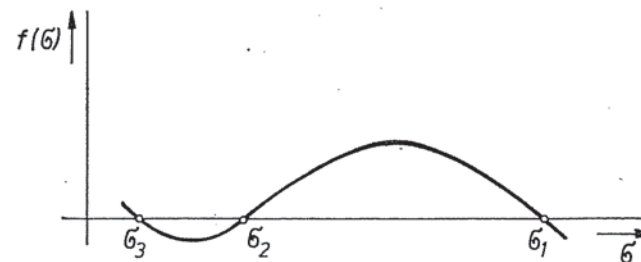
$$\begin{aligned} & \sigma^3 - \sigma^2 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sigma (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \\ & - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) - (\sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \\ & - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2) = 0 \end{aligned}$$

Sva tri korena ove jednačine su prirodna i predstavljaju glavne normale napone: $\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3$.

Pogodno je da se ova jednačina napiše u skraćenom obliku

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0 \quad (2.24.)$$

Njene korene ($\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3$) moguće je ustanoviti i grafički, ako se uspostavi odgovarajuća grafička zavisnost između jednačine $y = f(\sigma)$ kao opšte funkcije i odrede vrednosti promenljive σ za $f(\sigma) = 0$. Na sl. 13. šematski je prikazano ovo određivanje.



Sl. 13. Grafičko određivanje korena jednačine $f(\sigma) = 0$

Pošto veličine glavnih normalnih napona ne zavise od orijentacije koordinatnog sistema, to ni koeficijenti kubne jednačine po σ (J_1 ; J_2 ; J_3) takođe od nje ne mogu zavisiti, zbog čega se nazivaju invarijante tenzora napona. Njima, dakle, odgovaraju sledeći izrazi

$$J_1(T_\sigma) \equiv \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{const}^*) \quad (2.25.a)$$

$$J_2(T_\sigma) \equiv \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \\ = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 = \text{const.} \quad (2.25.b)$$

$$J_3(T_\sigma) \equiv \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \\ - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \text{const.} \quad (2.25.c)$$

Ove invarijante, a naročito prva, imaju veliki značaj, kako u teoriji elastičnosti, tako i u teoriji plastičnosti. Inače, za njih se u literaturi koriste još i sledeći nazivi:

- J_1 — linearna invarijanta;
- J_2 — kvadratna invarijanta;
- J_3 — kubna invarijanta.

Invarijante tenzora napona su, dakle, izrazi (sastavljeni od komponentata ovog tenzora) koji ostaju nepromenjeni pri zaokretanju koordinatnog sistema.

Pošto ni glavni naponi, ni invarijante, ne zavise od orijentacije koordinatnog sistema, to je prirodno što samo oni, ili izrazi sastavljeni od njih, mogu u potpunosti izraziti fizičke međuzavisnosti u vezi sa naponskim stanjima.

Neće biti suvišno ako se na ovom mestu ponovo ukaže na činjenicu da i najobičnije logičko rasuđivanje dovodi do zaključka da je naponsko stanje, po prirodi stvari, predodređeno spoljnim opterećenjima i uslovima deformisanja, pa zato nije ni moguće da ono zavisi od orijentacije koordinatnog sistema, već se mora izraziti veličinama koje su invarijantne u odnosu na ovu orijentaciju.

Ovu okolnost, međutim, ne bi trebalo mešati sa činjenicom da su veličine komponentata tenzora napona zavisne od orijentacije sistema, jer se one pri promeni orijentacije ne transformišu proizvoljno (što upravo invarijante potvrđuju), već na potpuno određeni način, tako da se fizički smisao tenzora time ne menja.

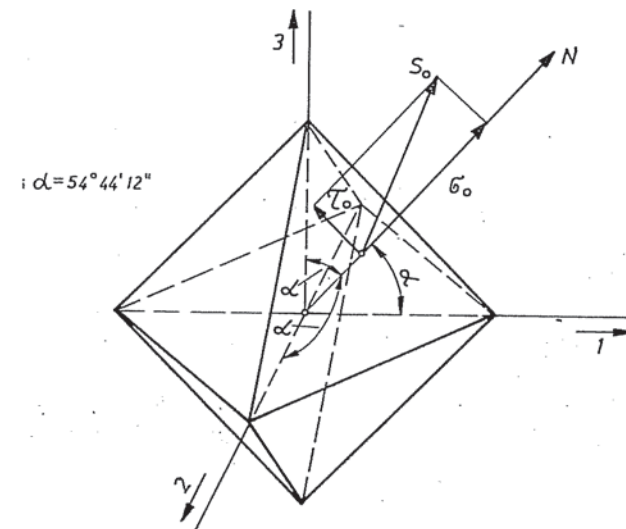
*) Pod $J = \text{const.}$ podrazumeva se konstantan iznos invarijante za neko određeno naponsko stanje (v. i dalja objašnjenja).

Na primer, ako su napisana dva tenzora, moguće je korišćenjem invarijanti zaključiti da li se oni odnose na različita naponska stanja, ili na jedno isto — izraženo preko koordinata različito orijentisanih sistema.

To znači da invarijante jednoznačno karakterišu naponsko stanje u nekoj tački napregnutog tela i da im je posebna pogodnost u tome što omogućuju da se reducira broj parametara kojima se opisuje to stanje.

2.9. OKTAEDARSKI NAPONI

Korisno je definisati i naponi koji deluju u ravnima podjednako nagnutim u odnosu na glavne ose (ima ih ukupno osam — po jedna u svakom oktantu koordinatnog sistema). Ove ravni obrazuju oktaedar (sl. 14) čiji uglovi leže na glavnim osama. Zato se na poni na njima nazivaju oktaedarski i imaju poseban značaj u teoriji elastičnosti i plastičnosti.



Sl. 14. Elementarni oktaedar na čijim površinama deluju oktaedarski naponi

Na osnovu prednjih razmatranja sledi da će pri podjednako nagnutim ravnima oktaedra koeficijenti glavnih pravaca biti:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

što znači da su uglovi koje normale na površine oktaedra zaklapaju sa glavnim osama: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 54^\circ 44' 12''$.

Iz ovog proizlazi da je veličina normalnog oktaedarskog napona

$$\sigma_0 = \sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (2.26.)$$

dok se veličina smičućeg oktaedarskog napona dobija prema sledećem:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \sqrt{S_0^2 - \sigma_0^2} = \\ &= \sqrt{\sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2 + \sigma_3^2 a_3^2 - (\sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1} \end{aligned}$$

Ako se u ovaj izraz uvedu pogodne zamene:

$$-\sigma_1 \sigma_2 = \frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 \right]$$

$$-\sigma_2 \sigma_3 = \frac{1}{2} \left[(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2 \right]$$

$$-\sigma_3 \sigma_1 = \frac{1}{2} \left[(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - \sigma_3^2 - \sigma_1^2 \right]$$

i izvrši elementarno sređivanje dobija se

$$\tau_0 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (2.27.)$$

Ovaj napon se takođe može izraziti i preko glavnih smičućih napona (koristeći ranije prikazane veze između glavnih normalnih i smičućih napona — jedn. 2.11.)

$$\tau_0 = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2} \quad (2.28.)$$

Kada se ovi izrazi za oktaedarske napone dovedu u vezu sa invarijantama tenzora napona, dobija se

$$\sigma_0 = \frac{J_1}{3} \quad (2.29.)$$

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{2J_1^2 - 6J_2}}{3} = \sqrt{\frac{2}{9}(J_1^2 - 3J_2)} \quad (2.30.)$$

što daje mogućnost da se oktaedarski naponi izraze i preko opštih komponenata tenzora napona (a ne samo glavnih—kao gore). Naime, oktaedarski smičući napon sa ovim komponentama biće

$$\tau_0 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (2.31.)$$

To istovremeno znači da je oktaedarski smičući napon kombinacija osnovnih naponskih invarijanti, pa zato i sam mora biti invarijantna veličina (kao, uostalom, i normalni oktaedarski napon). Iz te okolnosti proizlazi i njegov izuzetan značaj.

Korisno je pri ovome primetiti da je iznos oktaedarskog smičućeg napona blizak iznosu maksimalnog smičućeg napona. Može se dokazati da između njih postoji odnos:

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0,941 \geq \left| \frac{\tau_0}{\tau_{\max}} \right| \geq \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,816$$

Videće se kasnije da plastično deformisanje u telu može nastati tek onda kada smičući naponi u određenim ravnima dostignu kritične iznose. Te ravni, odnosno preseci, u kojima se pojavljuju maksimalni smičući naponi bliske su po svojoj orijentaciji ravnima oktaedra pogodno postavljenog u odnosu na pravac ovih napona. Stoga na ravnima zamišljenog oktaedra nastaju smičući naponi koji se samo malo razlikuju od maksimalnih (vidi se iz prikazanog odnosa da su oni nešto manji, ali ne mogu biti ispod 0,816). To omogućuje da se uslov plastičnosti, zasnovan na hipotezi o maksimalnom smičućem naponu, može prikazati ekvivalentnim uslovom zasnovanom na hipotezi o oktaedarskom smičućem naponu (v. poglavlje o uslovima plastičnosti).

2.10. SREDNJI NORMALNI NAPON («HIDROSTATIČKI PRITISAK»). SFERNI TENZOR NAPONA.

Izraz za normalni oktaedarski napon predstavlja istovremeno i tzv. srednji normalni napon:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{J_1}{3} \quad (2.32.)$$

koji je, dakle, invarijantna veličina, nezavisna od orijentacije osa sistema. S obzirom da je njena vrednost ista za sve pravce, može se zapaziti izvesna analogija sa hidrostatičkim pritiskom. Otuda se,

za slučaj da je srednji normalni napon pritiskujući, njegova vrednost uslovno naziva »hidrostatički pritisak«, ili srednji pritisak:

$$p = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = -\sigma_m \quad (2.33.)$$

Kasnije će biti pokazano da se plastično deformisanje jednog elementa ne bi ni moglo obaviti ukoliko bi on bio izložen ujednačenom svestranom pritisku ili zatezanju.

Ako se pretpostavi da su glavni normalni naponi jednaki srednjem naponu σ_m , može se definisati tzv. sferni tenzor napona u obliku

$$T_{S(\sigma)} = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} = \sigma_m \{T_1\} \quad (2.34.)$$

gde je T_1 jedinični tenzor:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.35.)$$

Takav slučaj nastupio bi, na primer, pri stvarnom hidrostatičkom pritisku, jer bi tada naponsko stanje bilo karakterisano sfernim tenzorom čije bi komponente bile:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_m.$$

2.11. DEVIJATOR NAPONA

Ma koji tenzor napona može se predstaviti kao zbir*) sfernog tenzora i tzv. devijatora napona (D_σ):

$$T_\sigma = T_{S(\sigma)} + D_\sigma \quad (2.36.)$$

Pri tome je devijator takođe tenzor u obliku

*) Uopšte je zbir dva tenzora takođe tenzor.

$$D_\sigma = T_\sigma - T_{S(\sigma)} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\sigma_x - \sigma_m) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_m) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & d_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & d_z \end{pmatrix}$$

gde su dijagonalne komponente devijatora označene simbolima:

$$d_x = \sigma_x - \sigma_m; \quad d_y = \sigma_y - \sigma_m; \quad d_z = \sigma_z - \sigma_m.$$

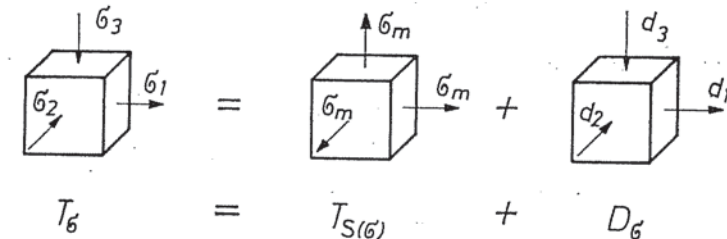
Ukoliko su u pitanju glavni naponi biće

$$D_\sigma = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sigma_1 - \sigma_m) & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_2 - \sigma_m) & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_3 - \sigma_m) \end{pmatrix} \quad (2.38.)$$

Očigledno je zbir dijagonalnih komponenta (po glavnoj dijagonali):

$$d_x + d_y + d_z = d_1 + d_2 + d_3 = 0$$

Iz izloženog proizlazi da se naponsko stanje u ma kojoj tački tela može predstaviti kao ravnomerno svestrano zatezanje ili pritisak sa naponom σ_m , kome je još dodato naponsko stanje određeno devijatorom napona. Prema tome, devijator napona treba shvatiti kao meru odstupanja postojećeg naponskog stanja od stanja svestranog istovrsnog naprezanja (»hidrostatičkog pri-



Sl. 15. Šematski prikaz razlaganja tenzora napona

tiska«) pri kome ne bi došlo do plastičnog deformisanja. Komponente devijatora (d) su zapravo te koje teže da promene oblik napregnutog elementa, dok srednji napon (σ_m) teži da promeni njegovu zapreminu (što je moguće samo za iznos elastičnih deformacija).

Razlaganje tenzora napona na sferni tenzor i devijator može se prikazati i šematski prema sl. 15.

Sferni tenzor može uopšte imati samo dve, a devijator tri različite šeme (sl. 16.).

Nije teško pokazati da postoje i invarijante devijatora napona. Naime, ako se u izraze za invarijante tenzora napona (2.25.) uvedu komponente devijatora (umesto komponenta tenzora) biće

$$J_1(D\sigma) \equiv (\sigma_x - \sigma_m) + (\sigma_y - \sigma_m) + (\sigma_z - \sigma_m) = 0 \quad (2.39.a)$$

$$J_2(D\sigma) \equiv (\sigma_x - \sigma_m)(\sigma_y - \sigma_m) + (\sigma_y - \sigma_m)(\sigma_z - \sigma_m) + (\sigma_z - \sigma_m)(\sigma_x - \sigma_m) - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 =$$

$$= -\frac{1}{6} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right]^* - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) =$$

$$= -\frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] =$$

$$= d_1 d_2 + d_2 d_3 + d_3 d_1 = \text{const.} \quad (2.39.b)$$

$$J_3(D\sigma) \equiv \begin{vmatrix} d_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & d_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & d_z \end{vmatrix} = d_1 d_2 d_3 = \text{const.} \quad (2.39.c)$$

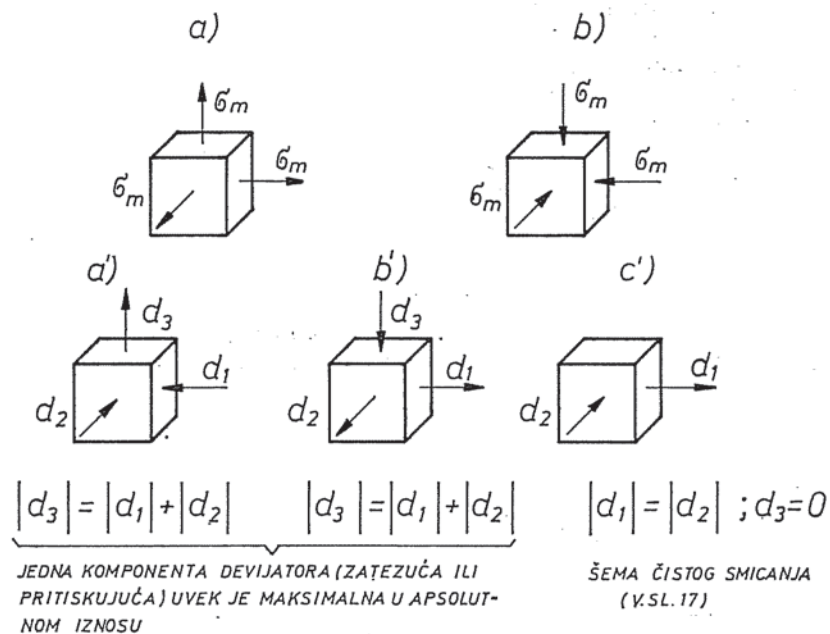
*) Ova zamena proizlazi iz:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 = (d_x - d_y)^2 + (d_y - d_z)^2 + (d_z - d_x)^2 =$$

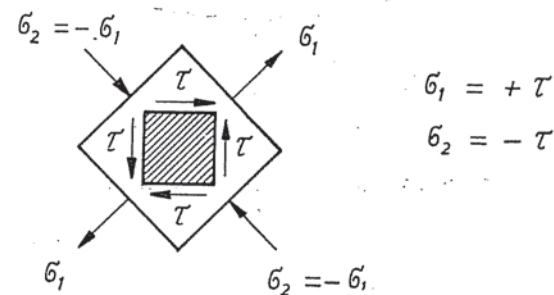
$$= 2(d_x + d_y + d_z)^2 - 6(d_x d_y + d_y d_z + d_z d_x)$$

a kako je $d_x + d_y + d_z = 0$ dobija se

$$d_x d_y + d_y d_z + d_z d_x = -\frac{1}{6} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right]$$



Sl. 16. Opšti šematski prikaz sfernog tenzora i devijatora



Sl. 17. Čisto smicanje (klizanje)

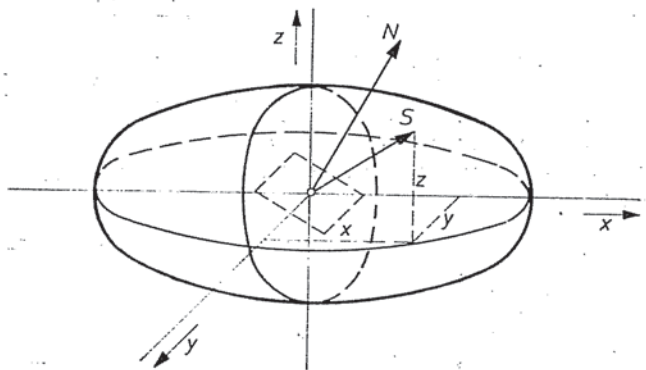
2.12. GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA NAPONSKIH STANJA. ELIPSOID NAPONA.

Moguće je pokazati da je veličina ukupnog napona S na proizvoljno nagnutim površinama, za slučaj kada su poznati iznosi glavnih normalnih napona, određena radijus-vektorom, odnosno poluprečnikom jednog elipsoida (sl. 18.), što znači da se tenzor na-

pona može interpretirati geometrijski. Drugim rečima, površina ovog elipsoida napona dobija se preko poluprečnika — vektora ukupnog napona S kada se odgovarajuća elementarna površina ΔA najrazličitije zaokreće u prostoru oko posmatrane tačke. Prema tome, ovaj elipsoid na svoj način ilustruje šemu naponskih stanja u toj tački. Dužine njihovih poluosa odgovaraju veličinama glavnih napona. Očigledno je da će za slučaj jednakosti glavnih napona elipsoid preći u sferu (zbog čega se odgovarajući tenzor i naziva sferni).

U slučaju da je jedan od glavnih napona jednak nuli, elipsoid prelazi u elipsu (ravansko naponsko stanje).

Najzad, za slučaj da su dva glavna napona jednaka nuli (linijsko, jednoosno naponsko stanje) elipsoid napona prelazi u pravu liniju.



Sl. 18. Elipsoid napona

Jednačina elipsoida napona dobija se iz:

$$S_1 = \sigma_1 a_1 ; S_2 = \sigma_2 a_2 ; S_3 = \sigma_3 a_3$$

$$a_1^2 = \frac{S_1^2}{\sigma_1^2} ; a_2^2 = \frac{S_2^2}{\sigma_2^2} ; a_3^2 = \frac{S_3^2}{\sigma_3^2}$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

odnosno

$$\frac{S_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{S_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{S_3^2}{\sigma_3^2} = 1 \quad (2.40.)$$

Prema tome, poluprečnik — vektor iz centra elipsoida do ma koje tačke njegove površine predstavlja ukupan napon S na odgo-

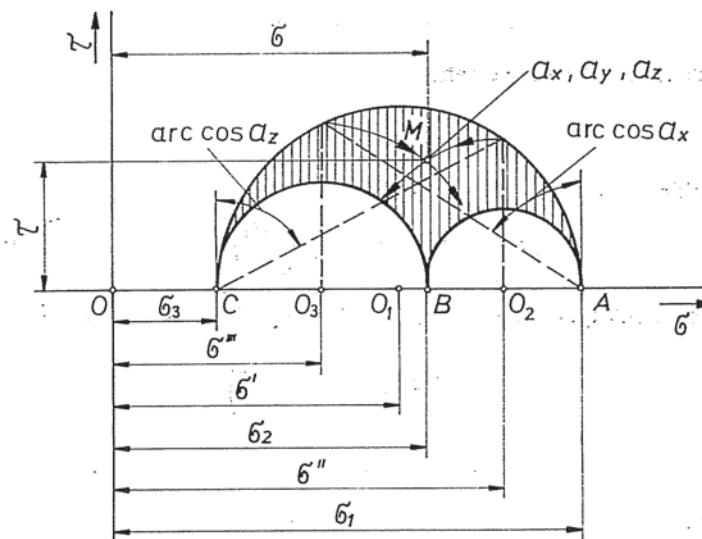
varajućem elementu posmatranog preseka. Jasno je da on ne može biti veći od najvećeg glavnog napona τ_1 niti manji od najmanjeg napona (vektora) σ_3 .

Na taj način, elipsoid napona može se shvatiti kao svojevrsan geometrijski tenzor napona.

Napomena: prednji zaključci važe samo ako sva tri normalna napona imaju isti znak (+) ili (—). Ukoliko pak oni imaju različite znake, dobiće su umesto elipsoida hiperboloid.

2.13. MOHR-ovi KRUGOVI NAPONA

Naponsko stanje u nekoj tački napregnutog tela može se takođe predstaviti grafički pomoću tzv. Mohr-ovog dijagrama napona (ili Mohr-ovih krugova). Ovaj dijagram u stvari predstavlja grafički prikaz vektora normalnog i smičućeg napona koji deluju na različito orijentisanim ravnima (sl. 19.).



Sl. 19. Mohr-ovi krugovi napona

Jednačine ovih krugova proizlaze iz napred navedenih odnosa (2.17. i 2.18.), tj.

$$\sigma = \sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2$$

$$\tau^2 = S^2 - \sigma^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - \sigma^2 = \sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2 + \sigma_3^2 a_3^2 -$$

$$- (\sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2)^2$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

Ako se reši sistem ovih jednačina po a_1^2 ; a_2^2 ; a_3^2 biće

$$a_1^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

$$a_2^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}$$

$$a_3^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}$$

Kako su leve strane ovih jednačina uvek pozitivne, to broji- telji i imenitelji sa desne strane moraju imati iste znake. Uzimaju- ċi, dalje, da je $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ dobija se da za drugu jednačinu mora biti zadovoljan uslov

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2 \leq 0$$

Posle uvođenja zamene

$$\sigma' = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

biće

$$(\sigma - \sigma')^2 + \tau^2 \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 \quad (2.41.a)$$

Na analogan naćin dobija se i za ostale dve jednaćine

$$(\sigma - \sigma'')^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \quad (2.41.b)$$

gde je $\sigma'' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$

$$(\sigma - \sigma''')^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \quad (2.41.c)$$

gde je $\sigma''' = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$

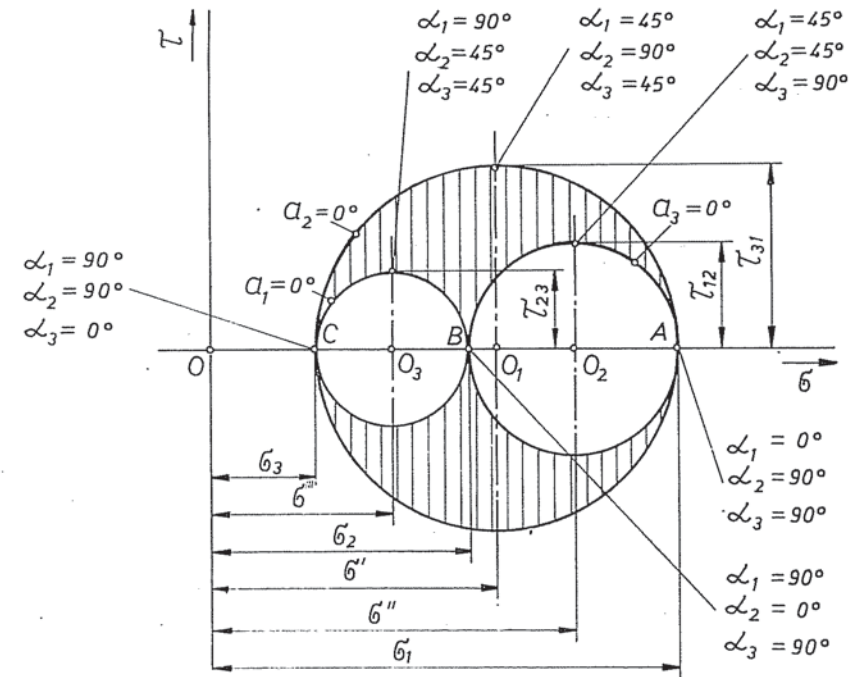
Ako se sve tri jednaćine (2.41.) povežu znakom jednakosti, one će predstavljati krugove ċiji su centri raspoređeni po apscisi na ra- stojanjima σ' ; σ'' ; σ''' od početka koordinatnog sistema (sl. 19. i 20.) — Mohr-ove krugove.

Iz prve jednaćine proizlazi da taćke Mohr-ovog dijagrama koje odgovaraju različito orijentisanim površinama moraju ležati unutar oblasti ogranićene krugom prećnika $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$, a ostale dve jednaćine pokazuju da se te taćke moraju nalaziti van krugova ċiji su poluprećnici $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$ i $(\sigma_2 - \sigma_3)/2$

To istovremeno znaći da taćka na Mohr-ovom dijagramu ko- ja određuje naponsko stanje u ma kojoj ravni (tj. ma kojoj par $\sigma - \tau$) mora, u općtem slućaju, ležati unutar šraćirane površine (ta- ćka M na sl. 19). Gde će se ova taćka stvarno nalaziti zavisi od ko- sinusa pravca (a_x ; a_y ; a_z) odgovarajuće ravni. Glavnim pravcima odgovaraju taćke: A, B, C. Duć ċitave jedne krućnice biće odgo- varajući kosinus pravca jednak nuli.

Na primer, ako elementarne ravni prolaze kroz glavnu osu 2 biće $a_2 = 0$, a taćka u dijagramu će se nalaziti na krugu ċija je je- dnaćina

$$\left[\sigma - \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1)\right]^2 + \tau^2 = \frac{1}{4}(\sigma_3 - \sigma_1)^2$$



Sl. 20. Mohr-ovi krugovi napona

Međutim, ako su svi koeficijenti pravaca $0 < a_i < 1$, onda će odgovarajuća tačka biti unutar šrafirane oblasti, određujući pri tome par komponenta napona (σ ; τ) za ravan na koju se odnose ti koeficijenti (sl. 19.)

Mogućnost da se prostorno naponsko stanje prikaže na ovaj način u jednoj ravni proizlazi, dakle, iz činjenice da se svaki par σ ; τ odnosi na samo jednu od bezbroj različito orijentisanih ravni u nekoj tački napregnutog tela.

S obzirom na ovakve odnose, prikazani krugovi su glavni krugovi napona.

Ako bi se izazvalo dodatno svestrano ujednačeno zatezanje ili pritisak, krugovi se ne bi menjali, već bi se samo izvršila njihova translacija duž ose σ . Drugim rečima, ukoliko je veći sferni tenzor pri datom naponskom stanju, utoliko će Mohrovi krugovi biti više udaljeni od koordinatnog početka. Sa druge strane, devijator napona ne utiče na položaj krugova, već samo na razlike u njihovim prečnicima.

Iz dijagrama se vidi da je najmanji normalni napon $\sigma = \tau_3$ a maksimalni $\sigma = \sigma_1$.

Smičući napon je jednak nuli u ravnima na koje se odnose naponi σ_1, σ_2 i σ_3 (glavnim ravnima), dok mu je maksimalan iznos u ravni za koju je

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

Sa prikazanih skica (sl. 19. i 20.) može se uočiti da poluprečnici glavnih krugova određuju veličine glavnih smičućih napona:

$$|\tau_{12}| = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$$|\tau_{13}| = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

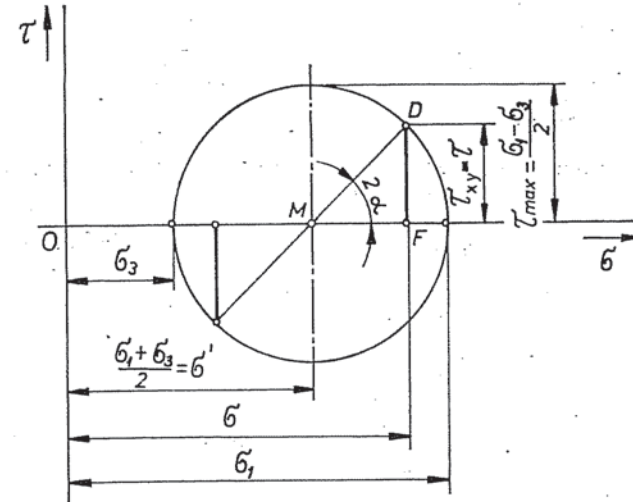
$$|\tau_{23}| = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

Osim toga, vidi se da su veličine glavnih normalnih napona na onim površinama u kojima deluju glavni (ekstremni) smičući:

$$\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}, \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

Iz izloženog nije teško zaključiti da korišćenje Mohr-ovih krugova za praktično rešavanje zadataka iz oblasti plastičnosti ipak nije pogodno u opštem slučaju, već samo za slučaj kada je naponsko stanje dato glavnim naponima.

Za slučaj ravanskog naponskog stanja (na primer $\sigma_2 = 0$) postoji samo jedan krug (sl. 21.). Pri ovome ugao nagiba poluprečnika prema apsisci određuje pravac odgovarajuće ravni, a naponsko stanje u nekoj tački određuje se tačkom koja leži na kružnici.



Sl. 21. Mohr-ov krug napona za slučaj ravanskog naponskog stanja

Iz geometrijskih odnosa proizlazi da je u ovom slučaju

$$\tau_{\max}^2 = \tau^2 + (\sigma - \sigma')^2$$

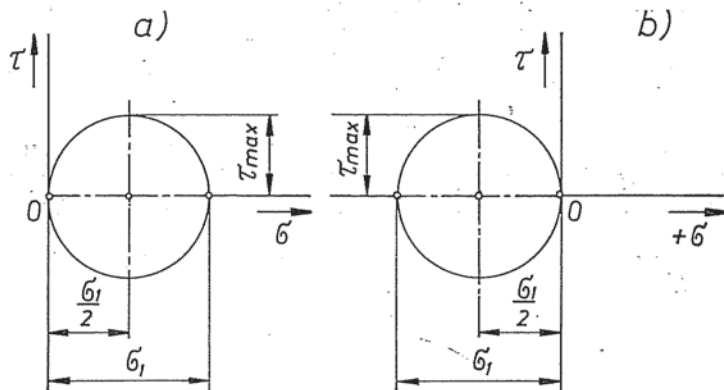
Dalje je

$$\overline{OF} = \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha$$

$$\overline{DF} = \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha$$

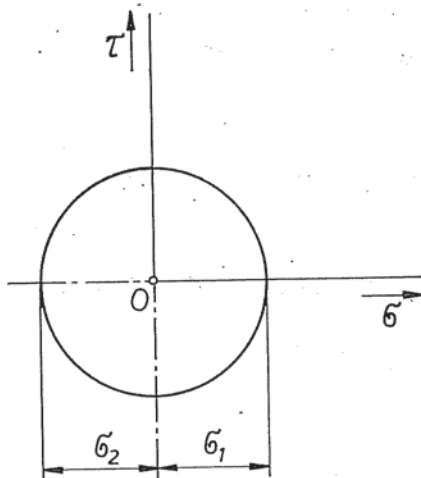
što odgovara ranije izvedenim jednačinama (2.19.) i (2.20.).

Za slučaj jednoosnog naprezanja (zatežućeg, odnosno pritiskujućeg) postojaće takođe jedan Mohr-ov krug (sl. 22.).



Sl. 22. Mohr-ov krug za slučaj zatežućeg (a) i pritiskujućeg (b) jednoosnog naprezanja

I u slučaju čistog smicanja*) postoji samo jedan Mohr-ov krug (sl. 23.)



Sl. 23. Mohr-ov krug za slučaj čistog smicanja

2.14. UOPŠTENI (EKVIVALENTNI, EFEKTIVNI, UPOREDNI) NAPONI

U teorijama elastičnosti i plastičnosti nalazi široku primenu tzv. uopšteni (ekvivalentni) smičući napon (τ_e), koji

*) Čisto smicanje se događa, na primer, pri uvijanju cilindričnog tela, i uopšte pri $\sigma_1 = -\sigma_2$; $\sigma_3 = 0$ (v. sl. 17.).

predstavlja skalarnu invarijantu veličinu, a izraz za njega razlikuje se od izraza za smičući oktaedarski napon (jedn. 2.27.) samo u veličini koeficijenta ispred korena:

$$\tau_e = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (2.42.a)$$

odnosno, sa opštim komponentama:

$$\tau_e = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (2.42.b)$$

Ovaj izraz, zapravo, predstavlja pozitivnu vrednost kvadratnog korena apsolutnog iznosa druge invarijante devijatora napona (v. jedn. 2.39.b) tj.

$$\tau_e = \sqrt{|J_2(D\sigma)|} \quad (2.43.)$$

Pored ove, takođe se veoma široko koristi i nešto izmenjena (ali po suštini i obliku analogna) skalarna karakteristika (takođe uvek pozitivna) za normalni napon — uopšteni normalni napon

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (2.44.a)$$

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (2.44.b)$$

Koeficijent ispred korena u ovoj jednačini daje posebnu pogodnost čitavom izrazu, s obzirom da pri jednoosnom naprezanju on postaje jednak glavnom normalnom naponu σ_1 , što ima izuzetan značaj pri rešavanju mnogih problema (kao što će se kasnije videti).

Ovi naponi u različitim literaturnim izvorima nose i druge nazive, kao: intenzivnost*) napona, efektivni —, ekvivalentni —, uporedni napon.

Na taj način je, uvođenjem pojma izvesnog uopštenog napona, izvršeno veoma pogodno redukovanje napona, jer je višeosno naponsko stanje (u opštem slučaju) svedeno na slučaj jednoosnog, odnosno delovanje više napona zamenjeno je jednim ekvivalentnim naponom. Njegova dalja pogodnost je u tome što je on skalarna veličina, ali i kao takva karakteriše naponsko stanje.

*) Eventualni naziv intenzitet napona mogao bi možda biti pogrešno shvaćen — kao intenzitet vektora napona.

Formulisanje izraza za uopštene napone u prikazanom obliku, odnosno sa ovakvim koeficijentima ispred korena, proizašlo je iz ranije pomenute ideje da se troosno naponsko stanje dovede u vezu sa rezultatima opita jednoosnim zatezanjem ili pritiskivanjem, što sa praktičnog stanovišta ima izuzetan značaj.

Ako se oktaedarski smičući napon uporedi sa uopštenim smičućim naponom, onda se lako može utvrditi da je razlika između njih, s obzirom na koeficijente ispred korena, sledeća

$$\tau_e = \sqrt{\frac{3}{2}} \tau_0 \quad \mathcal{N} \quad (2.45.)$$

a takođe i da postoji veza

$$1,155 \approx \frac{2}{\sqrt{3}} \geq \frac{\tau_e}{|\tau_{\max}|} \geq 1 \quad \mathcal{N} \quad (2.46.)$$

Zahvaljujući ovome, oktaedarski smičući napon može se odrediti i na osnovu rezultata jednoosnog zatezanja ili pritiska (v. poglavlje o deformacionoj čvrstoći) jer je

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_e \quad (2.47.)$$

$$\frac{\tau_e}{\sigma_e} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \mathcal{N} \quad (2.48.)$$

2.15. KOEFICIJENT NAPONA

Iz odnosa prikazanih na sl. 19. može se definisati tzv. koeficijent napona v_σ kao

$$v_\sigma = \frac{\overline{O_1B}}{\overline{O_1A}} = \frac{\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (2.49.)$$

Naime, tačka B, koja karakteriše srednji glavni napon σ_2 može se u opštem slučaju pomerati po čitavom prečniku velikog kruga, tj. između tačaka A i C, već prema tome koju vrednost ima ovaj napon. To znači da koeficijent v_σ predstavlja relativnu vrednost položaja ovog napona, pa je jasno da se njegov iznos može kretati u granicama

$$-1 \leq v_\sigma \leq 1 \quad \mathcal{N}$$

$\sqrt{3}$

Kako je po definiciji σ_1 najveći, a σ_3 najmanji glavni normalni napon, može se izraz za koeficijent v_σ pisati i u obliku

$$v_\sigma = \frac{\sigma_{sr} - \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}}{\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}} = \frac{2\sigma_{sr} - \sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}} \quad (2.50.)$$

Kasnije će biti pokazano da je moguće definisati analogne koeficijente za deformaciju i brzinu deformacije, kao i uspostaviti izvesne veze između njih.

Neke karakteristične vrednosti koeficijenta napona su sledeće:

za $\sigma_1 = \sigma_2$ (tj. $\sigma_{sr} = \sigma_{\max}$): $v_\sigma = 1$ \mathcal{V}

za $\sigma_2 = \sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} + \sigma_{\min})$: $v_\sigma = 0$

za $\sigma_2 = \sigma_3$ (tj. $\sigma_{sr} = \sigma_{\min}$): $v_\sigma = -1$

Očigledno je da će za neku određenu vrednost ovog koeficijenta napona koordinate Mohr-ovog dijagrama biti međusobno slične. Stoga se može reći da koeficijent napona karakteriše šemu devijatora, odnosno da je on svojevrsan pokazatelj naponskog stanja, i da se pri zatezanju menja u granicama $-1 \leq v_\sigma \leq 0$, pri pritiskivanju $0 \leq v_\sigma \leq +1$, dok je pri čistom klizanju $v_\sigma = 0$.

Vidi se, dalje, da će ovaj koeficijent ostati nepromenjen ako se sve tri glavne komponentne tenzora napona menjaju proporcionalno jednom istom parametru.

Iz jednačine za v_σ može se izraziti σ_2 i dobiti

$$\sigma_2 = v_\sigma \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

Kada se ovo unese u izraz

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$$

dobija se

$$\begin{aligned} & \left\{ \sigma_1 - \left[v_\sigma \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right] \right\}^2 + \\ & + \left[v_\sigma \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \sigma_3 \right]^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = \\ & = \frac{1}{2} (v_\sigma^2 + 3) (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \end{aligned}$$

S obzirom da je prema ranijem

$$|\tau_{13}| = |\tau_{\max}| = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}$$

biće i

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2 |\tau_{\max}|$$

Iz toga proizlazi da će uopšteni (ekvivalentni) smičući napon biti

$$\begin{aligned} \tau_e &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{2}{\sqrt{2}} |\tau_{\max}| \sqrt{v_\sigma^2 + 3} \end{aligned}$$

odnosno

$$|\tau_{\max}| = \frac{\tau_e \sqrt{3}}{\sqrt{v_\sigma^2 + 3}}$$

Odnos

$$C_\sigma = \frac{\tau_e}{|\tau_{\max}|} = \sqrt{\frac{v_\sigma^2}{3} + 1} \quad (2.51.)$$

može se takođe shvatiti kao izvestan pokazatelj naponskog stanja koji se menja u granicama

$$1,155 \geq C_\sigma \geq 1^{*)}$$

a odnos τ_0/τ_{\max}

$$0,941 \approx \frac{2\sqrt{2}}{3} \geq \left| \frac{\tau_0}{\tau_{\max}} \right| \geq \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,816^{*)}$$

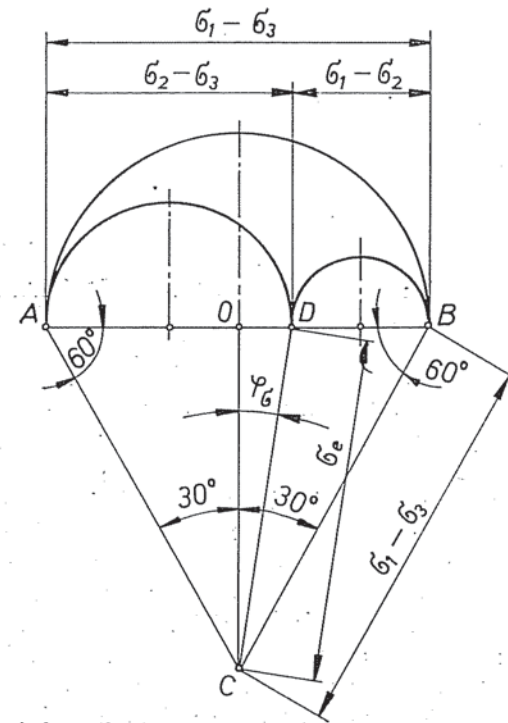
Najzad, ukazaće se na još jedan pokazatelj naponskog stanja. Naime, ako se ispod prečnika velikog Mohr-ovog kruga oformi ravnostrani trougao (sl. 24.), biće:

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$\overline{OC} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

$$\overline{DC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_e$$

*) Ovi odnosi su napred već bili prikazani.



Sl. 24. Konstrukcija ugla naponskog stanja

$$\overline{OD} = \sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_\sigma = \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}}$$

Očigledno je da se ugao φ_σ može menjati od 0° do 30° , odnosno $\operatorname{tg} \varphi_\sigma$ od 0 do $1/\sqrt{3}$. Usvojiće se da je duž \overline{OD} pozitivna kada se nalazi desno od tačke 0, a levo od nje — negativna. U tom slučaju biće

$$\operatorname{tg} \varphi_\sigma = \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}} = \frac{v_\sigma}{\sqrt{3}} \quad (2.52.)$$

To znači da i ugao φ_σ , odnosno njegov tangens, određuje šemu devijatora, tj. i on je, kao i v_σ značajan invarijantan pokazatelj naponskog stanja.

3. DEFORMACIJE*) I DEFORMACIONA STANJA

3.1. PRETHODNE NAPOMENE

Pri plastičnom deformisanju nekog tela menjaju se njegove dimenzije, a najčešće i osnovni oblik. Pojedine tačke takvog tela relativno se pomeraju u odnosu na njihove ranije položaje (ovo ne uključuje eventualno pomeranje čitavog tela.) Pri detaljnijoj analizi suštine procesa deformisanja najčešće se ne polazi od promene dimenzija čitavog tela, već od deformacija koje se odnose na neku usko lokalizovanu (dovoljno malu) zonu u njemu. Ovo stoga što se deformacije u pojedinim zonama, a najšire posmatrano i u pojedinim tačkama, međusobno razlikuju u opštem slučaju. Pri tome se pretpostavlja da je u okviru tako izdvojene male zapremine deformisanje homogeno (deformaciono stanje isto u svim tačkama). Osim toga, neophodno je da se definišu tzv. »male deformacije« koje odgovaraju pojedinim manjim etapama deformisanja, da bi se njihovim naknadnim sumiranjem došlo do velikih, odnosno konačnih deformacija posmatranog elementa zapremine.

Međutim, pri praktičnom rešavanju zadataka često se zakonitosti i odnosi koji važe za relativno mali element tela koje se deformiše prenose, odnosno primenjuju, na čitavu njegovu zapreminu ili njen relativno veliki deo. Time se, istina, u većini slučajeva dobijaju rešenja koja samo približno odgovaraju realnosti, ali se metodologija rešavanja znatno pojednostavljuje.

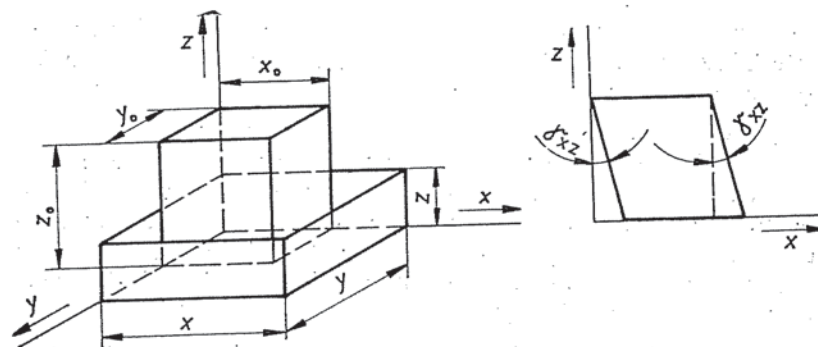
*) Treba primetiti da u našoj tehničkoj praksi i literaturi postoji izvestan nesklad pri korišćenju termina »deformacija«. Naime, u jednom slučaju se pod njim podrazumeva proces plastičnog oblikovanja, a u drugom određena karakteristika—pokazatelj stepena izvršenog plastičnog oblikovanja (kako će se iz daljeg videti, u ovom slučaju je najčešće u pitanju samo jedna komponenta ukupne deformacije). Stoga je ovde usvojeno da se za prvi slučaj koristi termin »deformisanje«, koji je jezički svakako adekvatniji, s obzirom da se odnosi na proces, a ne na kvantitativni tehnički pokazatelj stepena tog deformisanja.

3.2. POJAM DEFORMACIJE I NAČINI NJENOG IZRAŽAVANJA (DEFORMACIONE KARAKTERISTIKE, POKAZATELJI DEFORMACIJE)

Posmatraće se mali deo zapremine u obliku pravougaonog paralelepipeda, izdvojen u okolini neke tačke tela koje se deformiše (sl. 25.). Ako se pretpostavi deformisanje sabijanjem, onda je lako zaključiti da se u opštem slučaju mogu izmeniti dužine ivica ovog elementa, kao i prvobitni pravi uglovi između njegovih stranica (dobiće se kosougli paralelepiped). To znači da će se u posmatranom slučaju smanjivati prvobitna dužina (ivica) z_0 , a x_0 i y_0 će se povećavati. Istovremeno se može promeniti ugao od 90° između stranica paralelepipeda za neki ugao γ (zaokretanje, rotacija, klizanje). Deformacije koje se odnose na promenu dužine ivica paralelepipeda su linijske ili dužinske ($\epsilon_x; \epsilon_y; \epsilon_z$), a ove druge su ugaone ($\gamma_{xy}; \gamma_{yz}; \gamma_{zx}$).

Linijske deformacije (»dilatacije«) ovde treba shvatiti kao odnose priraštaja dužina ivica i njihovih prvobitnih iznosa, tj. bilo bi (ne ulazeći zasada u diferencijalne odnose):

$$\epsilon_x = \frac{\Delta x}{x_0}; \quad \epsilon_y = \frac{\Delta y}{y_0}; \quad \epsilon_z = \frac{\Delta z}{z_0}$$

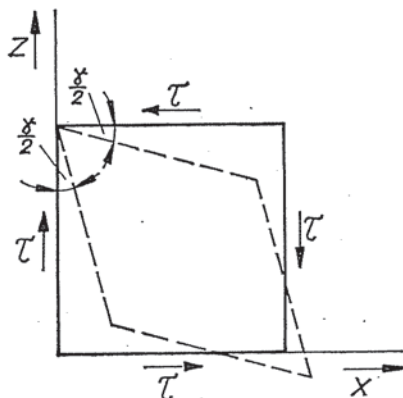


Sl. 25. Sema linijskih i ugaonih deformacija elementarnog paralelepipeda

Drugim rečima, to su relativne promene prvobitnih dužina*). Ugaone deformacije nastaju pod uticajem smičućih napona, tako da će stvarno ugaono deformisanje jedne stranice paralelepipeda biti nekoliko drukčije nego što je uprošćeno pokazano na

*) Videće se nešto kasnije, da je pri tačnijim analizama potrebno poći od beskonačno malih priraštaja (dx, \dots) i njih dovesti u odnos sa ukupnom dužinom ivice u posmatranom trenutku (x, \dots) a ne sa početnom dužinom (x_0, \dots).

sl. 25. Naime, pod uticajem smičućih napona ukupna promena prvobitnog pravog ugla za iznos γ biće, u stvari, podeljena na dva dela ($2 \cdot \gamma/2$), kako je to pokazano šematski na sl. 26.



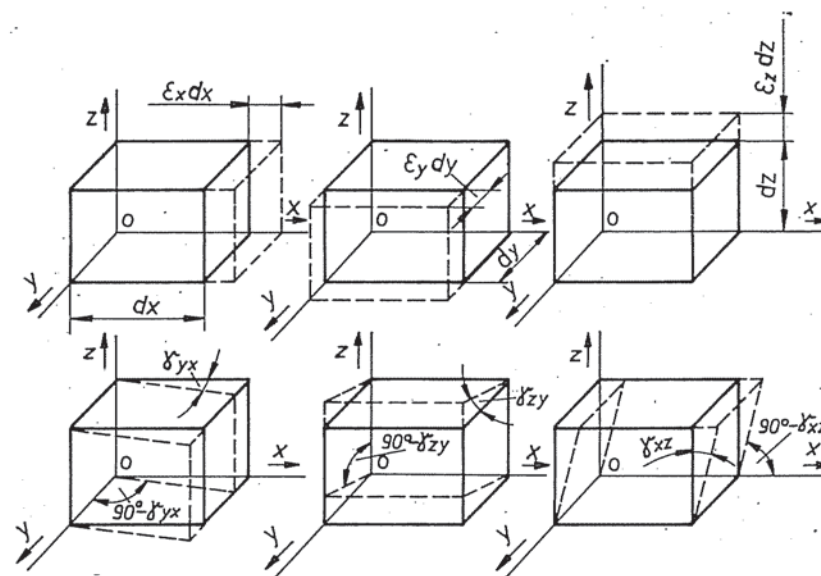
Sl. 26. Promene uglova između stranica elementa izazvane smičućim naponima

Ova promena uglova (tj. ugaona deformacija) naziva se najčešće klizanjem. Indeksi u oznakama ugaonih deformacija pokazuju na koju se ravan one odnose.

Na osnovu svega može se zaključiti da će deformaciono stanje u okolini neke tačke, predstavljeno deformacijama zamišljenog elementarnog paralelopipeda (čije se dimenzije u graničnom slučaju mogu beskonačno smanjivati), u potpunosti biti određeno ako su poznate tri linijske deformacije ($\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$) i tri ugaone ($\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$). Kompletna šematska predstava svih ovih deformacionih komponentata data je na sl. 27.

Koristeći ovako definisane komponente deformacija u teoriji elastičnosti i teoriji plastičnosti uspostavljene su odgovarajuće zakonitosti. Pošto se te deformacije odnose samo na pojedine tačke (odnosno njihovu neposrednu okolinu), one su kao takve funkcije koordinata u opštem slučaju. Zato je primena izvedenih zakonitosti pri rešavanju konkretnih problema često jako otežana i zahteva pogodna uprošćenja.

Iz tog razloga se za izražavanje stepena deformisanja pri analizi pojedinih procesa obrade metala radije koriste jednostavnije tehničke karakteristike, koje se odnose na promenu dimenzi-



Sl. 27. Šeme svih komponentata deformacije elementarnog paralelopipeda

ja čitavog tela, ili neke njegove veće zone*). Time se, istina, ne može dobiti podatak o stepenu deformisanja na pojedinim mestima zapremine, već samo neka osrednjena vrednost kao spoljni pokazatelj sveukupnog deformisanja. To znači da ove karakteristike ne mogu biti funkcije koordinata pojedinih tačaka (može se zamisliti da je izvršeno sumiranje i osrednjavanje svih lokalnih deformacija, čime je istovremeno zanemarena njihova stvarna neravnomernost po posmatranoj zapremini). Naravno, ovakva pojednostavljenja su dozvoljena samo pri izvesnim inženjersko-tehnološkim rešavanjima praktičnih problema, dok je pri detaljnijim analizama procesa deformisanja, ipak, neophodno poznavati deformacije na pojedinim mestima, odnosno njihov raspored po zapremini tela.

U vezi sa ovim uprošćenjima treba ukazati i na činjenicu da se za vreme plastičnog oblikovanja deformacija ostvaruje u različitim pravcima, ali da je za inženjerske proračune i upoređenja često dovoljno uzeti srednju vrednost promene samo jedne određene dimenzije tela — najčešće najveće ili najkarakterističnije (visina h , dužina l , površina A i dr.).

*) Određivanje deformacije za čitavo telo može se vršiti samo ako su osnovni geometrijski oblici početnog i krajnjeg stanja isti (paralelopiped, cilindar, ...). U protivnom, moraju se ove deformacije svoditi na elemente tela, kao što se čini, na primer, pri analizi dubokog izvlačenja šupljeg cilindričnog predmeta.

Pogodno je da se deformacija posmatra u tri uzajamno upravna pravca i da se ti pravci tako odaberu da na površinama koje leže upravno na njih nema ugaonih deformacija, već postoje samo linijske — izduženja ili skraćanja. Ose koje stoje u tim pravcima su, zapravo, glavne ose, dok su deformacije duž njih glavne deformacije (ε_1 ; ε_2 ; ε_3). Očigledno je da postoji analogija između njih i ranije definisanih glavnih napona.

One deformacije koje se odnose na uvećanje prethodnih dimenzija smatraju se pozitivnim, a one koje se odnose na njihovo smanjenje negativnim. U nekim slučajevima se od ovakve definicije ipak može odstupiti, ako se time razmatranje pojednostavljuje. Na primer, pri analizi procesa sabijanja deformacija tela po visini (skraćanje) može se eventualno smatrati pozitivnim, pogotovo ako se samo ona uzima u obzir (maksimalna glavna deformacija).

Jedna od glavnih deformacija je uvek maksimalna (u apsolutnom iznosu) i ona ima suprotan znak od druge dve glavne deformacije. Usvaja se da je uopšte

$$|\varepsilon_1| \geq |\varepsilon_2| \geq |\varepsilon_3|$$

Glavna deformacija, kao linijska, izražava se preko pogodnih karakteristika (definisanih izrazima koji omogućuju ocenjivanje veličine stepena deformisanja). S obzirom na oblik ovih pokazatelja, deformacija se može izraziti trojako — kao: apsolutna, relativna i logaritamska («stvarna»).

Apsolutna glavna deformacija se može shvatiti kao promena dimenzija posmatranog elementa, ili čitavog tela (ukoliko se ono homogeno deformiše), u pravcu jedne od glavnih osa (povećanje ili smanjenje), tj.

$$\Delta l = l - l_0 \quad (3.1.)$$

gde su l i l_0 dimenzije tela (ili njegovog elementa) u posmatranom pravcu i to u nekom trenutku deformisanja (l) i na početku (l_0). Međutim, ovaj vid izražavanja deformacije se izbegava kao nepogodan, jer dobijeni brojevi iznosi ne zavise samo od stepena ostvarenog deformisanja, već i od apsolutnog iznosa posmatranih dimenzija (l i l_0), zbog čega se radije koriste druge bezdimenzionalne karakteristike.

Relativna ili jedinična glavna deformacija ima konvencionalan karakter i ona izražava odnos glavne apsolutne deformacije prema početnoj dimenziji u istom pravcu:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l_0}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{l}{l_0} - 1 \quad (3.2.)$$

Nekada se ova deformacija za inženjersko-tehničke potrebe izražava kao procentualna, odnosno

$$\delta = \frac{\Delta l}{l_0} 100\% \quad (3.3.)$$

Logaritamska (stvarna, racionalna) glavna deformacija (φ), na primer pri jednoosnom istezanju, dobija se iz odnosa beskonačno malog priraštaja dužine (dl) i njenog stvarnog trenutnog iznosa l , a ne l_0 ! — v. dalje poglavlje o malim deformacijama. Iz toga proizlazi da je beskonačno mala deformacija ove vrste (odnosno priraštaj logaritamske deformacije):

$$d\varphi = \frac{dl}{l}$$

ili u konačnom obliku (konačna stvarna deformacija)

$$\varphi = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln (1 + \varepsilon)^*$$

U literaturi se ova karakteristika često naziva još i stepen deformacije (mada bi u skladu sa ovde usvojenom terminologijom, bio ispravniji naziv — stepen deformisanja).

Međutim, ovako definisana karakteristika odnosi se na slučaj homogenog deformisanja (v. naredno poglavlje), dok u slučaju nehomogenog deformisanja ona predstavlja samo uslovnu tehničku karakteristiku, koja daje podatak o deformisanosti čitavog tela na osnovu promene njegovih ukupnih dimenzija (ili jedne karakteristične zone tela).

Pošto se laboratorijsko određivanje ovih karakteristika izduženja najčešće vrši preko opita zatezanjem cilindričnih epruveta, pogodnije je u nekim slučajevima da se u toku ispitivanja vrši merenje prečnika epruvete, nego njene merne dužine. Zato je korisno pokazati da se stvarno izduženje može dobiti i preko prečnika, tj.

*) U nauci o čvrstoći materijala radi se sa relativno malim deformacijama, pa se koristi oblik prema jednačini (3.2.):

$$d\varepsilon = \frac{dl}{l_0}; \quad \varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

dok u oblasti plastičnosti početno nenapregnuto stanje, kome odgovara dužina l_0 , gubi značaj, pa se priraštaji dužine svode na l u opštem slučaju.

$$\varepsilon_d = \frac{d - d_0}{d_0}$$

$$\varphi_d = \ln(1 + \varepsilon_d) = \ln \frac{d}{d_0}$$

a iz uslova

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0 \quad (\text{v. dalje stavove):}$$

$$\varphi = \varphi_1 = -2\varphi_d = 2\ln \frac{d_0}{d} = \ln \frac{d_0^2}{d^2}$$

ili

$$\varphi = \ln \frac{A_0}{A} \quad (3.5.)$$

Očigledno je da se broječni iznosi relativne i stvarne deformacije međusobno razlikuju (pri inače istim početnim i konačnim dimenzijama tela). Ipak u oblasti relativno malih deformacija te razlike su neznatne, pa se za taj slučaj može smatrati da je

$$\varphi \approx \varepsilon$$

Naime, ako se izraz $\varphi = \ln(1 + \varepsilon)$ razvije u Mac-Laurin-ov red dobija se

$$\varphi = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} - \frac{\varepsilon^4}{4} + \dots$$

Ovaj red je konvergentan za $\varepsilon < 1$, pa ako se u prvom približenju zadrži samo prvi član, što za slučaj malih deformacija može imati opravdanja, dobija se navedena približna jednakost (na primer, za $\varepsilon < 0,1$ greška je manja od 5%, što se najčešće može tolerisati).

Međutim, bez obzira na ovu okolnost, pri analizi procesa plastičnog deformisanja metala često je neophodno koristiti logaritamsku deformaciju (za ovo postoje i drugi razlozi o kojima će biti reči malo kasnije).

Iz prednjeg razmatranja, dakle, proizlazi da se male deformacije, kakve se javljaju, na primer, u oblasti elastičnosti, mogu bez veće greške izražavati tako što će se veličine priraštaja dimenzija dovoditi u odnos sa početnim dimenzijama (relativna deformacija). Međutim, kod velikih deformacija, koje su elastično-plastične i koje su tipične za obradu metala deformisanjem, vrši se zanemarivanje elastičnih, a kao pokazatelj plastičnih upotrebljava se logaritamski pokazatelj φ . Pri tome se za tehničke potrebe najčešće uzima u obzir samo maksimalna glavna deformacija ($\varphi = \varphi_1$).

Takođe se, pored navedenih pokazatelja deformacije, dosta koristi i tehnička karakteristika koja predstavlja relativno suženje ili kontrakciju poprečnog preseka tela (presek u ravni upravnoj na pravac maksimalne glavne deformacije). Na primer, pri opitu jednoosnim zatezanjem biće

$$\psi = \frac{A_0 - A}{A_0} \quad (3.6.)$$

gde je: A_0 — početni, a A — trenutni poprečni presek.

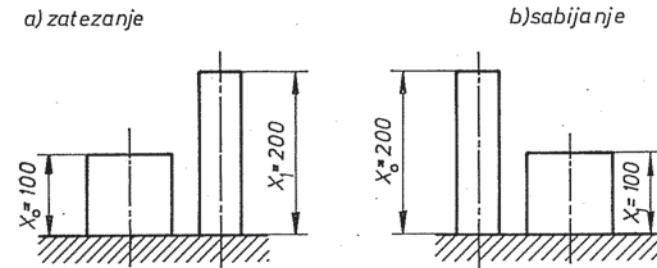
Veza između ovog i ostalih pokazatelja deformacije biće (zbog $A_0 l_0 = Al = V = \text{const.}$):

$$\psi = 1 - \frac{A}{A_0} = 1 - \frac{l_0}{l} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} = 1 - \frac{1}{e^\varphi} \quad (3.7.)$$

Deformaciju, dakle, treba shvatiti kao matematički izraz (pokazatelj, karakteristiku) koji omogućuje da se kvantitativno oceni stepen izvršenog deformisanja. Da bi ovi pokazatelji bili uporedivi i nezavisni od apsolutnih dimenzija i oblika tela, oni moraju biti tako formirani da predstavljaju bezdimenzione karakteristike.

Granični (maksimalni, kritični) iznos deformacije (ε_k ; δ_k ; φ_k ; ψ_k) posle kojeg nastupa razaranje tela predstavlja karakteristiku plastičnosti materijala.

Bez obzira na iznetu mogućnost da se karakteristike izvršenog deformisanja prikažu na različite načine, značajno je bliže ukazati i na izvesne suštinske razlike koje postoje između uslovnih karakteristika ($\varepsilon, \delta, \psi$) i logaritamske deformacije (φ). Objašnjenje u ovom smislu proizlazi iz primera na sl. 28. Pretpostavlja se da u oba slučaja (a, b) telo koje se deformiše ima istu zapreminu i da je u pitanju isti materijal. Idelano posmatrano, u oba slučaja troši se za deformisanje ista energija (što se može i eksperimentalno dokazati). Zato bi odgovarajući pokazatelj deformacije morao imati u oba slučaja istu apsolutnu vrednost. Međutim, lako se mo-



Sl. 28. Šema izduženja i skraćenja tela za isti stepen deformisanja

že uočiti da se relativne deformacije ε (ili procentualne δ) ovde međusobno razlikuju. To je, očigledno, opšti nedostatak relativne deformacije. Naime, u slučaju zatezanja je:

$$\varepsilon_{x(a)} = \frac{200}{100} - 1 = 1,0$$

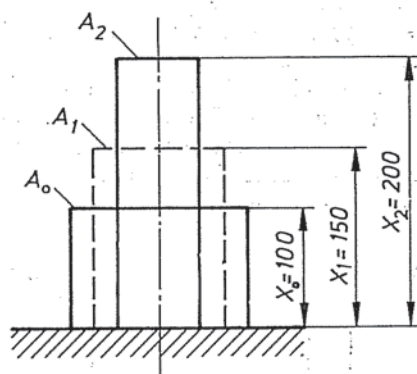
$$\varphi_{x(a)} = \ln \frac{200}{100} = 0,69$$

a u slučaju pritiskivanja:

$$\varepsilon_{x(b)} = \frac{100}{200} - 1 = -0,5 \neq \varepsilon_{x(a)}$$

$$\varphi_{x(b)} = \ln \frac{100}{200} = -0,69 = -\varphi_{x(a)}$$

Osim toga, relativna deformacija ima još jedno značajno ograničenje. Ako se telo, na primer, sabija (skraćuje) u više stupnjeva (operacija) onda se ukupna relativna deformacija (ε_u) ne može dobiti kao zbir pojedinačnih ($\varepsilon_u \neq \sum \varepsilon_i$). To, međutim, nije slučaj sa logaritamskom deformacijom (koja znači ima svojstvo aditivnosti). Ovo se može zaključiti iz primera na sl. 29., gde je izvršeno istežanje tela (prvobitne dužine x_0) u dva posebna stupnja (najpre do dužine x_1 , a zatim do konačne x_2). Iz prikazanih odnosa sledi da je za:



Sl. 29. Šema izduženja u više stupnjeva

a) relativne deformacije

$$x_0 \rightarrow x_1: \varepsilon_{0,1} = \frac{150 - 100}{100} = 0,50$$

$$x_1 \rightarrow x_2: \varepsilon_{1,2} = \frac{200 - 150}{150} = 0,33$$

$$\sum_1^2 \varepsilon_i = 0,83$$

$$x_0 \rightarrow x_2: \varepsilon_u = \varepsilon_{0,2} = \frac{200 - 100}{100} = 1 \neq 0,83$$

$$\sum \varepsilon_i \neq \varepsilon_u \quad (3.8.)$$

b) stvarne (logaritamske) deformacije

$$x_0 \rightarrow x_1: \varphi_{0,1} = \ln \frac{150}{100} = 0,405$$

$$x_1 \rightarrow x_2: \varphi_{1,2} = \ln \frac{200}{150} = 0,285$$

$$\sum_1^2 \varphi_i = 0,690$$

$$x_0 \rightarrow x_2: \varphi_u = \varphi_{0,2} = \ln \frac{200}{100} = 0,690$$

$$\sum \varphi_i = \varphi_u \quad (3.9.)$$

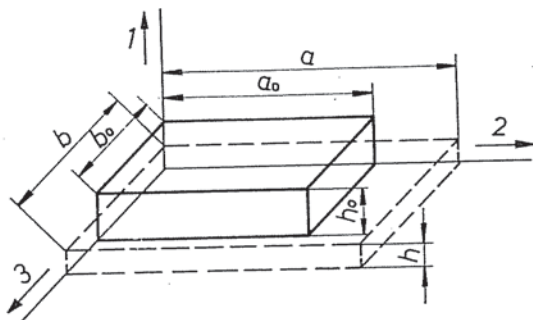
Ovo razmatranje dovodi do zaključka da stvarnu (logaritamsku) deformaciju karakterišu sledeća svojstva (koja ne poseduje relativna deformacija):

- isti brojevi iznosi se dobijaju za različite procese deformisanja koji se obavljaju sa istim utroškom energije;
- pri izduženju i skraćanju za isti stepen, dobijaju se isti brojevi apsolutni iznosi ove karakteristike (stvarne vrednosti se razlikuju samo u znaku);

— zbir pojedinačnih deformacija (izraženih u pojedinim fazama deformisanja) jednak je ukupnoj (izraženoj na osnovu početnih i konačnih dimenzija tela) — svojstvo aditivnosti.

Strogo posmatrano, logaritamska deformacija izražena jedinstveno za čitavo telo ima smisla samo ako je proces deformisanja homogen — isti u svim tačkama tela (kao što se, na primer, smatra pri ispitivanju materijala zatezanjem), tj. ako su lokalne deformacije približno iste kao i ukupna deformacija tela. Kod nehomogenog procesa ovaj pokazatelj predstavlja samo geometrijsko-dimenzijski odnos, ali se ipak i kao takav često koristi kao globalan pokazatelj izvršenog deformisanja tela (ukoliko se time ne čini suviše velika greška).

Ako se ponovo posmatra homogeno deformisanje pravouglog paralelopipeda čije su strane upravne na glavne ose deformacije (sl. 30.)* onda je zbog pretpostavke o nepromenljivosti zapremine (V):



Sl. 30. Deformisanje paralelopipeda u pravcu glavnih osa

$$V = h_0 a_0 b_0 = hab$$

$$\frac{h}{h_0} \frac{a}{a_0} \frac{b}{b_0} = 1$$

$$\ln \frac{h}{h_0} + \ln \frac{a}{a_0} + \ln \frac{b}{b_0} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$$

$$\varphi_1 = -(\varphi_2 + \varphi_3)$$

$$|\varphi_1| = |\varphi_2 + \varphi_3| \quad (3.10)$$

gde su: h_0 ; a_0 ; b_0 početne dužine ivica paralelopipeda, a: h ; a ; b dužine istih ivica posle izvršenog deformisanja.

Na ovaj način je dobila očigledniju analitičku interpretaciju prednja konstatacija da jedna glavna deformacija (maksimalna) mora biti u apsolutnom iznosu jednaka zbiru ostale dve, s tim što one imaju suprotan znak.

Napomena:

Ukoliko se umesto prikazanog elementarnog paralelopipeda oko jedne tačke posmatra elementarna sfera, ona će se u toku deformisanja u opštem slučaju pretvoriti u elipsoid čije ose određuju

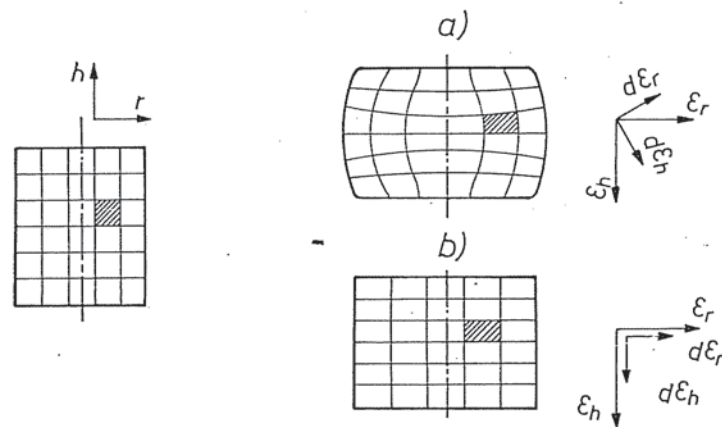
* Najčešće se pri proučavanju homogenog (ravnomernog) deformisanja deformaciono stanje opisuje promenom dužina ivica paralelopipeda, koji je postavljen tako da ove ivice padaju u glavne pravce deformacije.

ju glavne pravce. Pri tome će glavne deformacije biti: $\varphi_1 = \ln l/r_0$ $\varphi_2 = \ln h/r_0$; $\varphi_3 = \ln b/r_0$; gde su l , h i b poludužine tri glavne ose elipsoida, a r_0 poluprečnik sfere.

3.3. HOMOGENO I NEHOMOGENO DEFORMISANJE

Kada je deformaciono stanje*) u nekom trenutku procesa isto u svim tačkama tela, onda se deformisanje smatra homogenim. To je slučaj, na primer, pri ravnomernom istezanju epruvete u toku standardnog laboratorijskog ispitivanja materijala do momenta nastajanja lokalizovanog (nehomogenog) deformisanja.

Dalji primer nehomogenog i homogenog deformisanja prikazan je na sl. 31. za slučaj sabijanja cilindričnog tela. Ako je deformisanje nehomogeno (što je realno) onda se linijske i ugaone deformacije pojedinih lokalizovanih elemenata mogu odrediti samo eksperimentalno, a deformacija čitavog tela mogla bi se dobiti sabiranjem ovih elementarnih. To znači da strogo analitičko izražavanje ovalnog deformisanja praktično nije moguće (orijentaciju koordinatnog sistema trebalo bi menjati od tačke do tačke



Sl. 31. Šema nehomogenog (a) i homogenog (b) deformisanja pri sabijanju (ϵ_h i ϵ_r padaju u pravce glavnih osa deformacija čitavog tela, a $d\epsilon_h$ i $d\epsilon_r$ u pravce osa jednog elementa tela)

ke — v. sl. 31.a). Zato se pri rešavanju problema ove vrste najčešće polazi od pretpostavke o homogenom deformisanju.

*) Bliže pojedinosti o deformacionim stanjima i njihovom izražavanju daće se nešto kasnije.

Pri tome se smatra da su glavni pravci deformacija za čitavo telo isti kao i za ma koji element, a da se ravni i prave linije zadržavaju kao takve u toku čitavog procesa. Učinjena pretpostavka, naime, vodi ka sličnosti između promene oblika čitavog tela i ma kog njegovog elementa. To znači da, na primer, paralelopiped ostaje paralelopiped u toku čitavog procesa (otuda naziv za ovako pretpostavljen model »p a r a l e l o p i p e d s k o« deformisanje), mada pri tome može eventualno preći u kosougli paralelopiped, ukoliko se deformacija ne posmatra u glavnim pravcima. Takođe se može zamisliti i sfera u posmatranoj zoni tela, koja će pri homogenom deformisanju preći u elipsoid.

Pretpostavka o homogenom deformisanju omogućuje, dakle, da se na osnovu promena dimenzija čitavog tela izvede opšti zaključak o njegovoj deformaciji, ali to je očigledno vezano za odgovarajuće netačnosti i greške. U stvari, deformacije na pojedinim kritičnim mestima veće su nego što to pokazuju deformacione karakteristike dobijene na osnovu ukupnih spoljnih dimenzija. To istovremeno znači da se na osnovu promena spoljnih dimenzija tela može doneti samo indirektan i kvalitativan, a ne kvantitativan zaključak o veličini deformacija u pojedinim zonama.

Jasno je da ovako učinjene pretpostavke i uprošćenja omogućuju da se izbegnu pomenute matematičke teškoće pri rešavanju praktičnih problema, što nije ništa drugo do primena principa elementarne teorije plastičnosti.

Glavni uzročnici nastajanja nehomogenog deformisanja leže u uticajima: kontaktnog trenja, oblika (oblik alata prisiljava pojedine delove materijala da pređu različite puteve), kao i svojstva makro — i mikro—strukturne građe metalnih materijala.

Ukoliko bi, međutim, pretpostavka o homogenom deformisanju čitavog tela predstavljala relativno veliko odstupanje od realnosti, onda bi se telo moglo podeliti na veći broj manjih elemenata čije se deformisanje može bez veće greške (tj. u granicama praktične tačnosti) smatrati homogenim, što unekoliko podseća na podelu neke krive linije na male deliće koji se smatraju približno pravim. Na taj način se proučavanje nehomogenog deformisanja tela svodi na izučavanje homogenog deformisanja njegovih manjih elemenata (zona ili sasvim malih čestica).

Veličine ovih elemenata zavise prvenstveno od stepena nehomogenosti deformisanja čitavog tela i njihovo definisanje spada u važnije zadatke teorije velikih deformacija. U ekstremnom, a istovremeno i najopštijem, slučaju oni se mogu zamisliti toliko malim da predstavljaju, na primer, elementarne paralelopipede oko pojedinih materijalnih tačaka tela, sa dužinama ivica dx , dy , dz . Na ta-

ko zamišljene elemente, u okviru kojih je deformisanje homogeno, može se podeliti svako telo, bez obzira na opšti stepen nehomogenosti deformisanja po čitavoj njegovoj zapremini.

Iz ovog razloga se proučavanje plastičnog deformisanja i zasniva na zakonitostima do kojih se dolazi analizom odnosa karakterističnih za te male (elementarne) zapremine tela. Pri tome treba imati u vidu napred istaknutu okolnost — da će one ivice zamišljenog elementarnog paralelopipeda koje su u početku bile međusobno paralelne ostati takve i posle deformisanja (s tim što će im se izmeniti dužine u opštem slučaju), dok se pravi uglovi između njih mogu eventualno promeniti.

Na osnovu svega može se zaključiti da u slučaju homogenog deformisanja moraju biti ispunjeni sledeći uslovi:

— sve prave linije i ravni koje su uočene na telu (ili jednoj njegovoj zoni) ostaju takve (prave, odnosno ravni) i posle deformisanja;

— sve međusobno paralelne linije i ravni ostaju paralelne i posle deformisanja;

— ma koje dve međusobne paralelne dužine u okviru posmatrane zone tela menjaju se u toku deformisanja u istom odnosu.

Drugim rečima, deformisanje posmatrane zapremine (ili, eventualno, čitavog tela) je homogeno ako je deformaciono stanje isto u svim njenim tačkama.

Takođe se može zamisliti da se homogeno deformisanje obavlja onda kad se dve paralelne ravni, zamišljene u telu, međusobno približavaju ili udaljavaju, a u opštem slučaju i zajednički zaokreću (ugaona deformacija)*.

Pri tome je promena koordinata ma koje tačke linearna funkcija njenih koordinata pre deformisanja:

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \quad (3.11.c)$$

$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \quad (3.11.b)$$

*) U svakom slučaju, mera izvršenog homogenog deformisanja može biti u osnovi dvojaka: a) relativna deformacija pravolinijskih odsečaka u datim pravcima; b) promena uglova između parova pravolinijskih odsečaka koji su u početku bili međusobno upravni. Međutim, u slučaju homogenog deformisanja uvek postoje tri međusobno upravna pravca po kojima u toku procesa nastaju ekstremne linijske deformacije (najveća, najmanja i srednja) u svim tačkama posmatranog elementa ili tela. To su glavni pravci i u njima nema klizanja (ugaonih deformacija). Kako se pomenutom podelom problem nehomogenog deformisanja može svesti na problem homogenog, to znači da se u ma kom telu uvek mogu zamisliti, na primer, dovoljno male kocke, koje su tako orijentisane da se one pri deformisanju pretvaraju u pravougaone paralelopipede. To istovremeno znači da se u slučaju homogenog deformisanja deformaciono stanje može izraziti preko glavnih linijskih deformacija.

$$z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \quad (3.11.a)$$

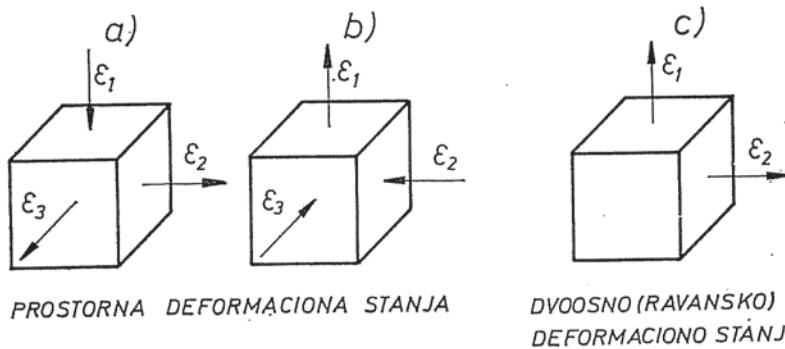
gde su: x, y, z — koordinate tačke pre deformisanja,
 x', y', z' — koordinate tačke posle deformisanja,
 a_{ij} — konstantni koeficijenti.

Teorija obrade metala deformisanjem bavi se, dakle, kako proučavanjem homogenog deformisanja, tako i nehomogenog (koje normalno postoji pri obradi metala plastičnim deformisanjem). U prvom slučaju u odgovarajuće pokazatelje se uključuju dimenzije čitavog tela, a u drugom je potrebno da se deformisana zapremina podeli na manje elementarne zapremine u okviru kojih se deformisanje može smatrati homogenim. Iz toga proizlazi da je osnovni problem pri analizi nehomogenog deformisanja određivanje promena deformacija od jedne do druge elementarne zone.

3.4. DEFORMACIONO STANJE

Moguća su tri osnovna vida deformacionog stanja: a) prostorno sa dve pozitivne glavne deformacije, b) prostorno sa dve negativne glavne deformacije i c) ravansko (dvoosno) deformaciono stanje*).

Ova stanja se, slično kao i naponska, mogu pogodno prikazati mehaničkim šemama deformacija (sl. 32.).

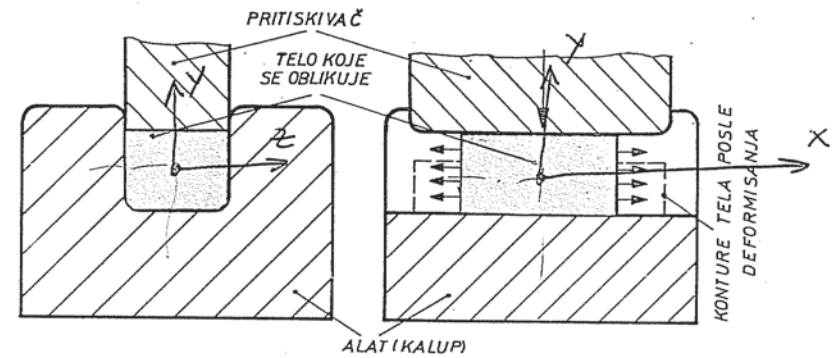


Sl. 32. Šeme različitih deformacionih stanja

Deformaciono stanje je ravansko kada pri datom naponskom stanju postoje deformacije samo u pravcu dve koordinatne ose, dok je deformacija u pravcu treće ose sprečena. Ilustrativan primer

*) Zbog pretpostavljene nepromenljivosti zapremine pri deformisanju, jasno je da jednoosno deformaciono stanje ne može postojati.

u tom smislu, za slučaj homogenog deformisanja, dat je na sl. 33., gde je prikazano sabijanje u alatu koji ne dozvoljava deformisanje pravno na bočne zidove.



Sl. 33. Primer ravanskog deformisanja

Ako pri ravanskom deformacionom stanju deformacija ne postoji, na primer, u pravcu ose z , onda se može dokazati (11.1.1.) da napon u pravcu te ose postoji i da iznosi

$$\sigma_z = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \quad (3.12.)$$

(dok je pri ravanskom naponskom stanju bilo $\sigma_z = 0$).

Jednom naponskom stanju ne mora, u opštem slučaju, odgovarati samo jedno deformaciono stanje*). Zato je S. I. Gubkin [24] svojevremeno predložio da se sveukupnost naponskog i deformacionog stanja izrazi preko odgovarajućih mehaničkih šema. One zapravo, objedinjuju šeme (napred naznačene) i naponskog i deformacionog stanja. Njihovim korišćenjem se može izvršiti racionalna podela različitih procesa obrade metala deformisanjem, s obzirom na naponsko-deformaciono stanje. Pregledan prikaz ovakvih šema za neke karakteristične vidove obrade dat je u tabeli 1.

Na osnovu ovoga može se zaključiti da se i deformisanje čitavog tela, odnosno pojedinih njegovih karakterističnih zona, može predstavljati šemama glavnih deformacija. Ovakve šeme, međutim, ne moraju odgovarati, u opštem slučaju, šemama deformaci-

*) Na primer, pri istiskivanju metala kroz određen otvor i izvlačenju metala kroz isti takav otvor šeme deformacionih stanja su iste, ali je naponsko stanje pri istiskivanju troosno i jednorodno (sva tri glavna napona su pritiskujući), a pri izvlačenju prostorno i raznorodno (postoje zatežujući i pritiskujući glavni naponi).

TABELA 1.

NAČIN DEFORMISANJA		MEHANIČKE ŠEME NAPONSKO-DEFORMACIONIH STANJA	
		NAPONSKO STANJE	DEFORMACIONO STANJE
ISTEŽANJE	RAVNOJERNO		
	LOKALIZOVANO		
SABIJANJE	SLOBODNO (BEZ KONTAKTNOG TREŃJA)		
	SA SPREĆENIM BOČNIM PROŠIR (BOČNIM TREŃJAMA)		
ISTISKIVANJE			
	ČISTO DUBOKO IZVLAČENJE		

ja u pojedinim malim elementima tela, ali ipak one odgovaraju deformaciji koja je dominantna (koja prevladava) u posmatranoj zoni (ili čitavom telu). Zato ove šeme daju jednovremeno predstavu o promeni oblika čitavog tela i o deformaciji koja prevladava u procesu.

Bez obzira na moguću neistovetnost vrste deformacionog stanja u odnosu na naponsko, treba primetiti da su ova stanja ipak međusobno usko povezana, jer i jedno i drugo nastaje kao posledica delovanja određenog sistema spoljnih sila.

3.5. MALE, KONACNE I VELIKE DEFORMACIJE

Iz izloženog proizlazi da na osnovu podataka o iznosu ostvarenih ukupnih deformacija celog tela posle obrade nije moguće podrobnije analizirati i oceniti čitav proces deformisanja. Pri obradi metala deformisanjem naponsko-deformaciono stanje se menja u toku procesa (tj. zavisi od njegove etape, odnosno posmatranog trenutka), a takođe ono nije isto u svim tačkama tela ni u jednom određenom trenutku (zavisi od koordinata tih tačaka). Osim toga, često se u pojedinim zonama tela razlikuju i u toku procesa menjaju i pravci glavnih osa napona i deformacija.

Iz ovih razloga je pogodno da se uvede pojam tzv. malih deformacija, tj. deformacija na malo je etapi deformisanja (etapne deformacije). Sumiranjem svih uzastopnih malih deformacija u toku posmatranog procesa može se doći do velike (u k u p n e, z n a t n e) deformacije.

Male deformacije, dakle, karakterišu deformaciono stanje samo na posmatranoj (maloj) etapi deformisanja. Zato se ponekad govori o malim priraštajima deformacije.

Pokazaće se nešto kasnije da u slučaju malih deformacija nema značaja da li se, na primer, promena dužine $\Delta l = l - l_0$ između posmatranog para materijalnih tačaka dovodi u odnos prema prvobitnoj dužini l_0 ili prema trenutnoj l , jer je

$$\frac{l - l_0}{l_0} \approx \frac{l - l_0}{l}$$

Takođe se može reći da su ove deformacije toliko male u poređenju sa jedinicom, da se njihovi kvadrati, kao i međusobni proizvodi, mogu bez veće greške zanemariti (kao male veličine višeg reda).

Ukoliko se smanjivanje deformacija, odnosno skraćivanje etapa na koje se one odnose, produži do u beskonačnost, dobiće

se beskonačno male deformacije. Ako se zamisli elementarni paralelopiped, orijentisan u pravcu glavnih osa, sa dužinama stranica a, b, c , onda će ove beskonačno male glavne deformacije biti:

$$d\varepsilon_1 = \frac{da}{a}; d\varepsilon_2 = \frac{db}{b}; d\varepsilon_3 = \frac{dc}{c} \quad (3.13.)$$

Nije teško zaključiti da je osnovna pogodnost malih deformacija u tome što one omogućuju da se deformacija može posmatrati u svakom trenutku procesa, a ne samo posle njegovog završetka. Korisno je, dalje, ukazati na činjenicu da je mala deformacija dovoljno malog elementa tela uvek homogena, mada ponekad ona može biti takva i u okviru veće zapremine, pa i čitavog tela, ili se kao takva pretpostavlja pri rešavanju niza praktičnih problema (v. prethodno poglavlje).

Već je rečeno da u toku deformisanja nekog tela (ili neke njegove posmatrane zone) svaka tačka u njemu menja položaj u odnosu na prvobitni (pri ovome se ne misli na kompletno pomeranje čitavog tela). Na osnovu upoređenja položaja ovih tačaka pre i posle deformisanja, mogu se izvesti zaključci o stepenu ostvarenog deformisanja u njihovoj okolini.

Neka su koordinate posmatrane tačke u početnom stadijumu x, y, z (projekcije vektora položaja tačke na koordinatne ose), a u nekom trenutku deformisanja koji je blizak početnom $x'; y'; z'$. U tom slučaju biće projekcije pomeranja (puta) u tačke na koordinatne ose:

$$x' - x = u_x \quad (3.14.a)$$

$$y' - y = u_y \quad (3.14.b)$$

$$z' - z = u_z \quad (3.14.c)$$

Uopšte su u slučaju homogenog deformisanja koordinate ma koje tačke posle deformisanja linearne funkcije njenih koordinata pre deformisanja.

Kako su komponente pomeranja $u_x; u_y; u_z$ različite za različite tačke tela, one su funkcije koordinata, a takođe će to biti i njihovi izvodi (ako se ne bi postavio uslov o bliskosti dva posmatrana trenutka, onda bi ove komponente zavisile još i od vremena).

Pogodno je da se napred definisane komponente deformacija

$$\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z$$

$$\gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}$$

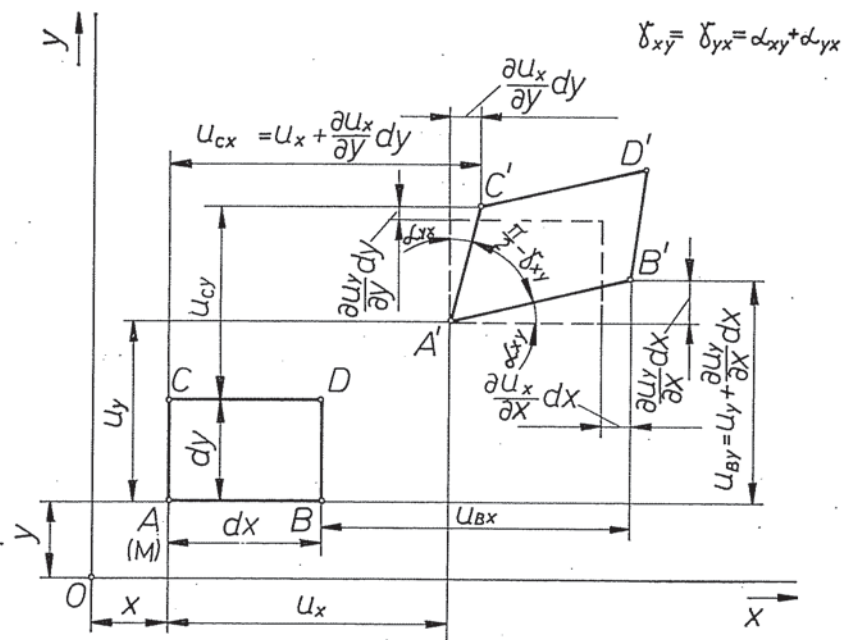
izraze preko ovih komponenata pomeranja (u_x, u_y, u_z). Zamisliće se da je u okolini tačke M (sl. 34) izdvojen elementarni parale-

lopiped sa dužinom ivica $dx; dy; dz$ i to tako da su ove ivice paralelne koordinatnim osama. Neka je ABCD projekcija ovog paralelopipeda na ravan xy pre deformisanja i neka je tačka A projekcija uočene tačke M (pretpostavlja se, radi pojednostavljenja razmatranja, da se zasada ova projekcija nalazi u istoj ravni i pre i posle deformisanja).

Posle izvršenog deformisanja, ove tačke će preći u nove položaje: A', B', C', D' . Pomeranje tačaka B i C može se izraziti preko pomeranja tačke A. Naime, tačka A je pomena za iznos određen komponentama ovog pomeranja u_x i u_y , a one su, kao što je na pred istaknuto, funkcije koordinata tačke M:

$$u_x = f(x, y, z)$$

$$u_y = f(x, y, z)$$



Sl. 34. Šema pomeranja i deformisanja projekcije elementarnog paralelopipeda

Kako je tačka B na beskonačno malom rastojanju dx od tačke A u pravcu ose x , to će njeno pomeranje u pravcu ove ose biti

$$u_{Bx} = f(x + dx, y, z)$$

Međutim, ako se zanemare beskonačno mali članovi višeg reda, moguće je smatrati da će se pomeranje tačke B u pravcu ose x razlikovati od pomeranja tačke A za iznos priraštaja funkcije u_x na dužini dx po koordinati x :

$$u_{Bx} = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx$$

Sada se može pisati da će relativna deformacija ivice AB (tj. dužine dx) u pravcu ose x biti

$$\epsilon_x = \frac{u_{Bx} - u_x}{dx} = \frac{u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx - u_x}{dx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

Na sličan način može se pokazati da je:

$$\epsilon_y = \frac{u_{Cy} - u_y}{dy} = \frac{u_y + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy - u_y}{dy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$u_{By} = u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx$$

$$u_{Cx} = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy$$

Pomenutim zanemarivanjem malih članova višeg reda u slučaju malih deformacija čini se, zapravo, pretpostavka da ugaone deformacije ne utiču na promenu linijskih dimenzija.

Ugaone deformacije mogu se odrediti prema sledećem.

S obzirom da se po pretpostavci radi o malim deformacijama, to će i promena uglova biti beskonačno mala, pa je

$$\operatorname{tg} \alpha_{xy} \approx \alpha_{xy}; \operatorname{tg} \alpha_{yx} \approx \alpha_{yx}$$

odnosno

$$\alpha_{xy} = \frac{u_{By} - u_y}{u_{Bx} + dx - u_x} = \frac{u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx - u_y}{u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + dx - u_x} = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}}$$

a ikako je

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \epsilon_x \ll 1$$

može se pisati

$$\alpha_{xy} \approx \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

a takođe (po analogiji) i

$$\alpha_{yx} \approx \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

Time se konačno dobija za ugao klizanja (tj. ukupnu promenu ugla pravougaonika):

$$\gamma_{xy} = \alpha_{xy} + \alpha_{yx} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

To znači da su ugaone deformacije, kao relativno male promene uglova posmatranog elementa, izražene u stvari tangensima ovih uglova.

Ako se posmatrani paralelopiped projektuje na ravni yz i zx mogu se na sličan način naći i ostale komponente malih deformacija, pa se konačno dobijaju:

a) za relativne linijske deformacije

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (3.15.a)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (3.15.b)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (3.15.c)$$

b) za relativne ugaone deformacije (klizanje)

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (3.16.a)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad (3.16.b)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \quad (3.16.c)$$

pri čemu treba imati u vidu da je uopšte:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}; \gamma_{yz} = \gamma_{zy}; \gamma_{zx} = \gamma_{xz}$$

Ove jednačine ujedno pokazuju da svih šest komponentata deformacije ne mogu imati proizvoljne vrednosti, već moraju ispuniti ove uslove.

Ukoliko se posmatraju deformacije većeg iznosa, onda se ne može izvršiti zanemarivanje kvadrata i međusobnih proizvoda pojedinih malih članova, već se u tom slučaju definišu tzv. **konačne deformacije**. Izrazi za njih proizlaze iz daljeg razmatranja.

Neka je posmatrana mala elementarna dužina (rastojanje) između dve tačke pre deformisanja dl , a posle njega $d\lambda$. U tom slučaju biće odgovarajuća relativna deformacija

$$\varepsilon = \frac{d\lambda - dl}{dl} \quad (3.17.)$$

odnosno

$$d\lambda = (1 + \varepsilon) dl \quad (3.18.)$$

Sa druge strane, zbog

$$x' = x + u_x(x, y, z)$$

$$y' = y + u_y(x, y, z)$$

$$z' = z + u_z(x, y, z)$$

biće (po razlaganju u Tajlorov red i zadržavanju samo malih članova prvog reda)

$$dx' = \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz$$

$$dy' = \frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \left(1 + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial u_y}{\partial z} dz$$

$$dz' = \frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dy + \left(1 + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) dz$$

Takođe će biti i

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$d\lambda^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$$

Kada se u ovu zadnju jednačinu uvrste prednji izrazi za dx' , dy' , i dz' , dobiće se

$$d\lambda^2 = dl^2 + 2e_{xx} dx^2 + 2e_{yy} dy^2 + 2e_{zz} dz^2 + 2e_{xy} dx dy + 2e_{yz} dy dx + 2e_{zx} dz dx$$

gde članovi e_{ij} imaju sledeća značenja:

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3.19.a)$$

$$e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3.19.b)$$

$$e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (3.19.c)$$

$$e_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \quad (3.20.a)$$

$$e_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (3.20.b)$$

$$e_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (3.20.c)$$

Može se pokazati da ovi članovi (koeficijenti u jednačini po $d\lambda^2$) predstavljaju komponente konačne deformacije, koje u potpunosti određuju naponsko stanje. One su ujedno i komponente tenzora konačne deformacije, koji se može pisati kao:

$$T_e = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.21.)$$

Da bi se prednje dokazalo, posmatraće se najpre dužina dl koja je u početku bila paralelna osi x . U tom slučaju biće $dy = dz = 0$ pa iz navedene jednačine proizlazi da je

$$d\lambda^2 - dl^2 = 2e_{xx} dx^2$$

Međutim, pri ovome je i $dl = dx$ zbog čega se dobija

$$\frac{d\lambda}{dl} = \frac{d\lambda}{dx} = \sqrt{2e_{xx} + 1} \quad (3.22.)$$

a kako je napred pokazano, na osnovu izraza za relativnu deformaciju, takođe se može pisati

$$\frac{d\lambda}{dl} = \frac{d\lambda}{dx} = 1 + \varepsilon_{xx} \quad (3.23.)$$

odnosno

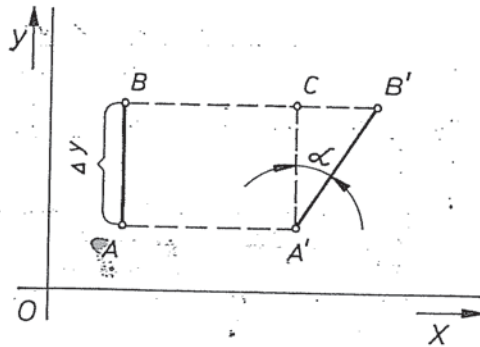
$$\varepsilon_{xx} = \sqrt{2e_{xx} + 1} - 1 \approx e_{xx} \quad (3.24.)$$

Ova veza pokazuje da i član e_{xx} određuje relativno izduženje posmatrane elementarne dužine, koja je pre deformisanja bila paralelna osi x .

Analogni zaključci mogu se izvesti i za članove e_{yy} i e_{zz} .

Međutim, posmatrana dužina u opštem slučaju nije paralelna ni jednoj osi i zato u izraz za kvadrat njenog priraštaja ulaze sva tri člana.

Na sličan način može se objasniti smisao i ostalih koeficijenata (e_{xy} ; e_{yz} ; e_{zx}). U tu svrhu mogu poslužiti odnosi prikazani na sl. 35.



Sl. 35. Ostvarenje konačne ugaone deformacije jednog elementa dužine

Dužina CB' biće jednaka Δu_x (tj. odgovaraće razlici pomeranja u_x), iz čega proizlazi

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta u_x}{\Delta y}$$

Kada $\Delta y \rightarrow 0$ i kada je (u opštem slučaju) pomeranje u_x funkcija sve tri promenljive, gornji odnos prelazi u

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}$$

i postaje pokazatelj izmene prvobitnog ugla (klizanja).

Nije teško zaključiti da i ostali članovi u jednačini za e_{xy} karakterišu odgovarajuća klizanja, tako da čitav taj izraz definiše međusobne položaje posmatrane dužine (vlakna) u toku procesa deformisanja. Sličan zaključak važi i za koeficijente e_{yx} i e_{zx} , pa

se može reći da svi oni karakterišu ugaone deformacije, tj. da su komponente konačnih ugaonih deformacija.

Korisno je da se posle ovoga izvrši bliže upoređenje između komponenata malih i konačnih deformacija.

Ukoliko se u izrazu za e_{xx} zanemare kvadrati izvoda pomeranja po koordinatama, što je opravdano u slučaju malih deformacija, onda konačna deformacija prelazi u malu, tj. dobija se već prikazan odnos

$$\varepsilon_{xx} = \sqrt{2e_{xx} + 1} - 1 \approx e_{xx}$$

odnosno

$$\varepsilon_{xx} = \sqrt{\left(1 - \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2} - 1 \approx e_{xx}$$

ili

$$e_{xx} \approx \varepsilon_{xx} = \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

itd.

Na sličan način dobija se pri zanemarivanju međusobnih proizvoda pojedinih izvoda u izrazu za e_{xy} :

$$e_{xy} \approx \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

itd.

Drugim rečima, iz izraza za komponente konačnih deformacija mogu se dobiti male, ako se zanemare beskonačno mali članovi višeg reda (izvrši linearizacija izraza), a ako su deformacije znatne, onda se sasvim tačni iznosi odgovarajućih komponenata mogu dobiti samo na osnovu potpunih izraza (3.19. i 3.20.) za konačne deformacije (zanemarivanje kvadrata i međusobnih proizvoda u tom slučaju ne može doći u obzir, jer su tada u pitanju veličine koje nisu zanemarljivo male — pomeranja su znatna u odnosu na dimenzije tela ili elementa koji se posmatra, a njihovi izvodi po koordinatama nisu mnogo manji od jedinice).

Iz prednjeg bi se, na prvi pogled, moglo zaključiti da je u najvećem broju slučajeva pri analizi procesa obrade metala deformisanjem potrebno operisati sa komponentama konačnih deformacija (s obzirom da one najtačnije opisuju deformaciono stanje, kao i da se u okviru ovih procesa obično ostvaruju deformacije znatne veličine). Međutim, bez obzira na principijelnu opravdanost takvog stanovišta, od njega se praktično odstupa, jer bi se u protivnom pojavile nepremostive matematičke teškoće (prvenstveno usled nelinearne veze između deformacija i pomeranja).

Iz ovog razloga se čitava teorija obrade metala deformisanjem, ipak, zasniva na teoriji malih deformacija. Tačnije

rečeno, koristi se teorija beskonačno malih priraštaja deformacija.

Povoljna je okolnost što ona omogućuje da se sumiranjem svih tih malih priraštaja*) dođe do velikih (ukupnih, zbirnih, znatnih, integralnih) deformacija,**) karakterističnih za obradu metala plastičnim oblikovanjem.

Da bi se odredile ove deformacije () nekog tela, ili elementa u okviru kojeg je deformisanje homogeno, potrebno je, dakle, da se izvrši sabiranje svih uzastopnih malih deformacija koje nastaju u pojedinim kratkim etapama čitavog procesa. U okviru svake etape razlikuju se početno i krajnje stanje, pri čemu početno odgovara krajnjem stanju prethodne etape, a krajnje početnom stanju sledeće. Time se izbegava operisanje složenim izrazima za komponente konačnih deformacija.

S obzirom da se teorija malih deformacija zasniva na beskonačno malim priraštajima, odnosno pomeranjima, pri formiranju izraza za njihove komponente, nema značaja da li će se priraštaji dužina dovoditi u odnos sa početnom ili krajnjom etapnom dužinom, jer se one u ovom slučaju sasvim približavaju jedna drugoj, prelazeći u graničnom slučaju u tekuću (trenutnu) dužinu.

Na primer, pri jednostavnom jednoosnom istezanju biće beskonačno mala deformacija u pravcu istezanja (osa x)

$$\frac{dl_x}{l_x}$$

gde je l_x — trenutna dužina.

*) Uopšte su ovi priraštaji:

$$d\epsilon_x = \frac{\partial (du_x)}{\partial x}$$

itd.

$$d\gamma_{xy} = \frac{\partial (du_y)}{\partial x} + \frac{\partial (du_x)}{\partial y}$$

itd.

**) Ponekada se u literaturi ova deformacija naziva konačna, ali taj termin treba izbegavati kada se želi da ukaže kako deformacija nije izražena preko napred izvedenih složenih izraza za komponente konačne deformacije, već kao zbir uzastopnih malih deformacija. Ipak, kako se sa komponentama konačnih deformacija pri analizi procesa obrade normalno ne radi, ne bi trebalo da unosi zabunu ni eventualno korišćenje samo dva termina: mala i konačna deformacija.

Kada se sve ove male (etapne) deformacije sabemu, dolazi se do ukupne deformacije tela istegnutog od prvobitne dužine l_0 do krajnje l_1 :

$$\varphi_x = \int_{l_0}^{l_1} \frac{dl_x}{l_x} = \ln \frac{l_1}{l_0} \quad (3.25.)$$

Ranije je već istaknuto da se ovaj logaritamski oblik deformacije veoma mnogo koristi pri analizi procesa obrade metala plastičnim deformisanjem, a ovde je pokazano da on praktično predstavlja pogodnu aproksimaciju konačnih deformacija. Iako se ova deformacija u literaturi često naziva stvarna (za razliku od relativne $\epsilon = (l - l_0)/l_0$), taj naziv treba shvatiti samo uslovno.

Kao dalji primer u ovom smislu može se ponovo uzeti slučaj elementarnog paralelopipeda sa dužinom ivica Δa ; Δb i Δc koje su paralelne glavnim osama male deformacije. Komponente ovih (malih) deformacija su tada

$$\frac{d(\Delta a)}{\Delta a}; \frac{d(\Delta b)}{\Delta b}; \frac{d(\Delta c)}{\Delta c}$$

a ako se ovi izrazi integrišu, dobija se ukupna deformacija kao

$$\varphi_a = \ln \frac{\Delta a_2}{\Delta a_1}; \varphi_b = \ln \frac{\Delta b_2}{\Delta b_1}; \varphi_c = \ln \frac{\Delta c_2}{\Delta c_1}$$

gde se indeksi 1 i 2 odnose na dimenzije elementa pre i posle konačnog (velikog) deformisanja.

Ako je deformisanje homogeno u okviru čitavog tela, a njegov proces monoton, onda se u prednje izraze mogu, umesto dimenzija malog elementa, uvesti dimenzije čitavog tela tj.

$$\varphi_a = \ln \frac{a_2}{a_1}; \varphi_b = \ln \frac{b_2}{b_1}; \varphi_c = \ln \frac{c_2}{c_1}$$

Drugim rečima, ako je deformisanje homogeno (ravnomerno) i ako se glavni pravci deformisanja poklapaju sa pravcima osa tela, onda se ukupne deformacije mogu dobiti iz početnih i konačnih dimenzija čitavog tela. Na primer, za slučaj tela prikazanih na sl. 36. biće

a) za paralelopiped:

$$\varphi_x = \ln \frac{x}{x_0}; \varphi_y = \ln \frac{y}{y_0}; \varphi_z = \ln \frac{z}{z_0}$$

b) za cilindar:

$$\varphi_z = \ln \frac{z}{z_0}; \varphi_\theta = \varphi_r = \ln \frac{r}{r_0}$$

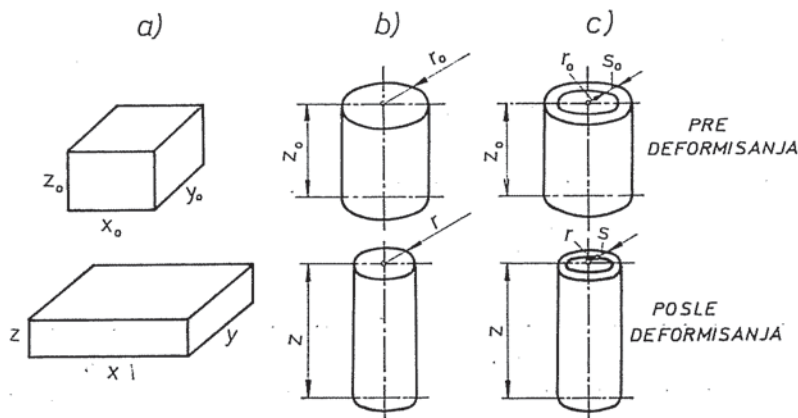
c) za cev:

$$\varphi_z = \ln \frac{z}{z_0}; \varphi_\theta = \ln \frac{r}{r_0}; \varphi_r = \ln \frac{s}{s_0}$$

Jasno je da se znatno grublja aproksimacija čini ako se pri ovome koristi relativna tehnička deformacija

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_0}; \varepsilon_y = \frac{\Delta y}{y_0}; \varepsilon_z = \frac{\Delta z}{z_0}$$

jer se time odnos koji važi za malu deformaciju primenjuje na ukupnu.



Sl. 36. Ravnomerno deformisana tela različitih oblika

Napomena: prikazano integrisanje beskonačno malih deformacija radi dobijanja velike vrši se normalno pri analitičkom rešavanju problema, dok se pri eksperimentalnom radu vrši obično sabiranje pojedinih registrovanih malih (etapnih) deformacija.

Po istom principu mogu se sabirati i etapne ugaone deformacije (koje se, prema izloženom, definišu tangensima uglova) i tako dobiti ukupna ugaona deformacija.

3.6. TENZOR DEFORMACIJE (MALE)

Ma kakvo deformaciono stanje u okolini jedne tačke tela može se u potpunosti definisati tenzorom deformacije,

na analogan način kao naponsko stanje pomoću tenzora napona. Ovaj tenzor ima takođe ukupno devet komponentata — tri linijske deformacije (ε) i šest ugaonih (γ), pri čemu se one odnose na male deformacije (tehnički pokazatelji velikih deformacija ne mogu u opštem slučaju biti komponente tenzora deformacije, sem ako nisu u pitanju konačne deformacije — što se, prema prednjim zaključcima, normalno izbegava*).

S obzirom da se, prema sl. 34., uglovi klizanja sastoje iz zbira ugla zaokretanja strane AB (α_{xy}) i strane AC (α_{yx}), nije za promenu oblika ni važno kakav će biti odnos između ovih uglova, već je značajan samo njihov zbir, koji treba da bude jednak γ . To daje mogućnost da se komponente ugaone deformacije izraze preko druge dve komponente koje su jednake polovini ukupnog ugla klizanja. Na primer, može se uzeti umesto α_{xy} i α_{yx}

$$\frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{yx}$$

tj. izvršiti osrednjavanje uglova klizanja:

$$\frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} (\alpha_{xy} + \alpha_{yx}) \quad (3.26.)$$

Na taj način, može se napisati tenzor deformacije u sledećem obliku

$$T_\varepsilon = \left\{ \begin{array}{ccc} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{array} \right\} \quad (3.27.)$$

ε_x ; ε_y i ε_z se nazivaju još i normalne komponente tenzora deformacije.

Kako je $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, itd., ovaj tenzor je simetričan i stvarno sadrži samo tri različite ugaone deformacije, odnosno šest različitih komponentata.

* Tenzorske veličine, u opštem slučaju, mogu biti: male deformacije (ε_x, \dots), beskonačno male deformacije—priraštaji ($d\varepsilon_x, \dots$) i konačne deformacije (ε_{xy}, \dots), a kako će se kasnije videti, takođe i brzine deformacija.

Ukoliko se posmatra deformacija paralelopipeda orijentisanog u pravcu glavnih osa, onda će se pojaviti samo linijske deformacije, pa tenzor poprima oblik

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (3.28.)$$

Napomena: Jasno je da ranije definisane tehničke karakteristike deformacija, koje se odnose na promenu dimenzija čitavog tela: $\varepsilon, \delta, \psi, \varphi$ ne mogu biti komponente ovog tenzora u opštem slučaju, jer ne opisuju deformaciju u pojedinim tačkama tela, niti daju podatak o njenoj neravnomernosti, već predstavljaju samo uslovne aproksimativne tehničke pokazatelje, kojima se, radi uprošćenja, samo pripisuju svojstva malih, odnosno konačnih, deformacija.

3.7. DEVIJATOR TENZORA DEFORMACIJE. INVARIJANTE.

Tenzor deformacije ima ista svojstva kao i tenzor napona. On u potpunosti određuje deformaciono stanje u okolini posmatrane tačke, neprekidna je funkcija koordinata, ima slične invarijante kao i tenzor napona, a može se takođe razložiti na sferni tenzor i devijator.

Uopšte treba primetiti da je analogija između dalje navedenih odnosa i oblika različitih parametara deformacije i onih koji su bili izvedeni za napone očigledna, što čitavo razmatranje čini jednostavnijim.

Srednja linijska deformacija može se definisati na sličan način kao i srednji normalni napon:

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} \quad (3.29.)$$

Međutim, kako je pri plastičnom deformisanju zapremina praktično konstantna, to će uz tu pretpostavku biti $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$ pa je i $\varepsilon_m = 0$.

To znači da je sferni tenzor plastične deformacije $T_{s(\varepsilon)}$ jednak nuli (jer on po svojoj suštini odražava promenu zapremine), odnosno da je tenzor deformacije T_{ε} jednak devijatoru (D_{ε}):

$$T_{s(\varepsilon)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{pmatrix} = 0 \quad (3.30.)$$

$$D_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} (\varepsilon_x - \varepsilon_m) & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & (\varepsilon_y - \varepsilon_m) & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & (\varepsilon_z - \varepsilon_m) \end{pmatrix} \quad (3.31.)$$

$$T_{\varepsilon} = T_{s(\varepsilon)} + D_{\varepsilon} = D_{\varepsilon} \quad (3.32.)$$

Sferni tenzor, dakle, po svojoj prirodi izražava promenu zapremine (zapreminsku deformaciju) i kao takav ima značaj u slučaju elastičnog deformisanja (kada se promena zapremine ne zanemaruje). Drugim rečima, on izražava stanje svestranog ravnomernog istezanja, odnosno skraćivanja, koje je moguće samo za iznos elastičnog deformisanja.

Devijator, međutim, izražava promenu oblika (devijatornu deformaciju).

Najznačajniji pokazatelji malih deformacija mogu se izvesti i prikazati u obliku odgovarajućih izraza na način koji je potpuno analogan onom koji je izložen pri analizi naponskog stanja.

Tako se, na istovetan način (v. jedn. 2.23.), može doći do sistema homogenih linearnih jednačina čija determinanta mora biti jednaka nuli, iz čega proizilazi kubna jednačina po ε :

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0 \quad (3.33.)$$

Koreni ove jednačine su prirodni i predstavljaju glavne deformacije $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ i ε_3 . U sažetom obliku ona se može pisati (slično kao i za slučaj napona) kao:

$$\varepsilon^3 - J_1 \varepsilon^2 + J_2 \varepsilon - J_3 = 0 \quad (3.34.)$$

gde koeficijenti: J_1, J_2 i J_3 predstavljaju invarijante tenzora deformacije.

Prva (linearna) invarijanta tenzora (odnosno devijatora) deformacije određuju promenu zapremine pa je za slučaj plastičnog deformisanja:

$$J_1(T_\varepsilon) = J_1(D_\varepsilon) \equiv \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0 \quad (3.35.a)$$

Očigledno je da ova invarijanta određuje sferni tenzor plastične deformacije.

Druga (kvadratna) invarijanta ima oblik:

$$J_2(T_\varepsilon) \equiv J_2(D_\varepsilon) \equiv \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 = \text{const.} \quad (3.35.b)$$

Treća (kubna) invarijanta predstavlja determinantu:

$$J_3(T_\varepsilon) = J_3(D_\varepsilon) \equiv \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = \\ = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4} \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} - \frac{1}{4} (\varepsilon_x \gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 + \varepsilon_z \gamma_{xy}^2) = \\ = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = \text{const.} \quad (3.35.c)$$

3.8. UOPŠTENE (EKVIVALENTNE, EFEKTIVNE, UPOREDNE) I OKTAEDARSKJE DEFORMACIJE. GLAVNE UGAONE DEFORMACIJE.

Pozitivna vrednost invarijantnog izraza

$$\gamma_e = 2 \sqrt{|J_2(T_\varepsilon)|} \quad (3.36.)$$

naziva se uopštena ugaona deformacija (ili: efektivna, ekvivalentna, uporedna ugaona deformacija, a takođe i intenzivnost ugaone deformacije), i predstavlja, slično kao i intenzivnost smičućeg napona, jedan od najvažnijih skalarnih parametara deformacionog stanja. Deo izraza za drugu invarijantu može se napisati na nešto pogodniji način:

*) Na osnovu izloženog jasno je da ovo izjednačavanje tenzora i devijatora važi samo uz pretpostavku da je $V = \text{const.}$, odnosno za slučaj čisto plastičnog deformisanja dok u najopštijem slučaju treba pisati samo $J_1(T_\varepsilon)$

$$\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x = -\frac{1}{6} \left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 \right]^{**)}$$

pa će izraz za ovu invarijantu preći u

$$J_2(T_\varepsilon) = -\frac{1}{6} \left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 \right] - \frac{1}{4} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) = \frac{\gamma_c^2}{4} \quad (3.37.)$$

Iz ovoga izraza proizilazi da je uopštena ugaona deformacija:

$$\gamma_e = 2 \sqrt{|J_2(T_\varepsilon)|} = \\ = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} = \\ = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \quad (3.38.)$$

Pored ovog pokazatelja ugaone deformacije, takođe se veoma široko koristi i sledeća karakteristika:

$$\varepsilon_e = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} = \\ = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} = \\ = \sqrt{\frac{2}{3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)} \quad (3.39.)$$

*) Ova veza proizilazi iz:

$$\varepsilon_e = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{|J_2|}$$

$$(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 = \\ = 2 [\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 - (\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x)] = \\ = 2 (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 - 6 (\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x)$$

Kako je $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$ (zbog $V = \text{const.}$), biće

$$\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x = -\frac{1}{6} \left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 \right]$$

koja se naziva uopštena (ekvivalentna, efektivna, uporedna) deformacija ili intenzivnost deformacije. To je skalarna veličina, očigledno proporcionalna uopštenoj ugaonoj deformaciji γ_e .

Obe ove karakteristike su pogodne zato što kao skalarne i invarijantne veličine na jednostavan način količinski izražavaju stepen ostvarene deformacije, odnosno predstavljaju pogodne bezdimenzionalne skalarne pokazatelje deformacionog stanja.

Posebna pogodnost oblika uopštene deformacije ϵ_e jeste u tome što se za slučaj ravnomernog jednoosnog istezanja ili pritiskivanja dobija da je ϵ_e jednako maksimalnoj glavnoj deformaciji (čemu je prilagođen iznos koeficijenta ispred korena). To znači da se ispitivanjem samo ove (maksimalne) glavne deformacije može u praksi izvršiti ocena stepena izvršenog deformisanja u širem smislu (slično kao i ocena naponskog stanja preko uporednog napona σ_e , odnosno napona σ_1 pri jednoosnom zatezanju).

U oktaedarskim ravnima nastaju oktaedarske deformacije.

Oktaedarska ugaona deformacija ima takođe invarijantni karakter i iznosi

$$\begin{aligned} \gamma_o &= \frac{2}{3} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2} \quad (3.40) \end{aligned}$$

Linijska oktaedarska deformacija je za slučaj plastičnog deformisanja

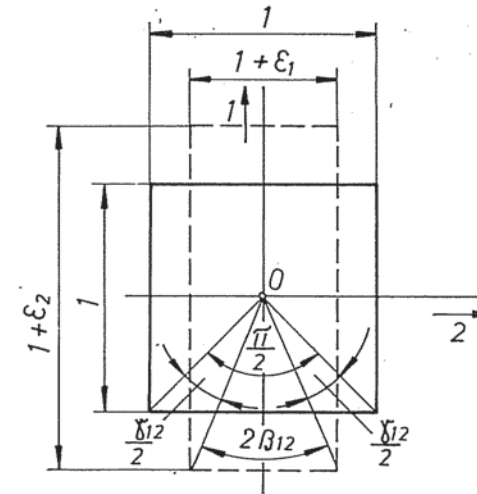
$$\epsilon_o = \epsilon_m = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3}{3} = 0 \quad (3.41)$$

U ravnima koje prolaze kroz jednu glavnu koordinatnu osu, a sa druge dve zaklapaju ugao od 45° , pojavljuju se ekstremne, tj. glavne ugaone deformacije (klizanja). Tačnije rečeno, glavna ugaona deformacija predstavlja promenu pravog ugla koji obrazuju ravni glavnih smičućih napona.

Da bi se uspostavila zavisnost između veličine ovih deformacija i glavnih linijskih, posmatraće se odnosi ilustrovani na sl. 37., gde je zapravo prikazan presek jedne elementarne kocke u ravni glavnih deformacija ϵ_1 i ϵ_2 . Ovaj presek je kvadratni, a dijagonale kvadrata su istovremeno presečne linije sa ravnima glavnih smičućih napona. Pre deformisanja ove dijagonale obrazuju prav ugao, a posle deformisanja u pravou glavnih osa, tj. prelaska kvadrata u pravougaonik, ovaj ugao će se promeniti za iznos ugaone deforma-

cije γ_{12} , tj. postaće $2\beta_{12}$. Ako se, dalje, pretpostavi da su dužine strana kvadrata bile jednake jedinici, biće dužine strana pravougaonika:

$$1 + \epsilon_1 \quad \text{i} \quad 1 + \epsilon_2$$



Sl. 37. Poprečni presek elementarne kocke u ravni glavnih deformacija

Komponenta ugaone deformacije (klizanja) je

$$\frac{\gamma_{12}}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \beta_{12} \right) = \frac{1 - \operatorname{tg} \beta_{12}}{1 + \operatorname{tg} \beta_{12}}$$

$$\operatorname{tg} \beta_{12} = \frac{1 + \epsilon_1}{1 + \epsilon_2}$$

$$\gamma_{12} = 2 \frac{1 - \frac{1 + \epsilon_1}{1 + \epsilon_2}}{1 + \frac{1 + \epsilon_1}{1 + \epsilon_2}} = 2 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2 + \epsilon_1 + \epsilon_2} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{1 + \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}}$$

Ako su u pitanju deformacije ϵ koje su male u poređenju sa jedinicom onda se može pisati

$$\gamma_{12} = \epsilon_2 - \epsilon_1 = \gamma_{21} \quad (3.42.a)$$

a na analogan način i

$$\gamma_{23} = \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \quad (3.42.b)$$

$$\gamma_{31} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \quad (3.42.c)$$

Očigledno je

$$\gamma_{12} + \gamma_{23} + \gamma_{31} = 0 \quad (3.43.)$$

Upoređujući navedene karakteristike deformacija, nije teško dokazati da između njih postoje sledeći odnosi:

$$\gamma_c = \sqrt{3} \varepsilon_c \quad (3.44.a)$$

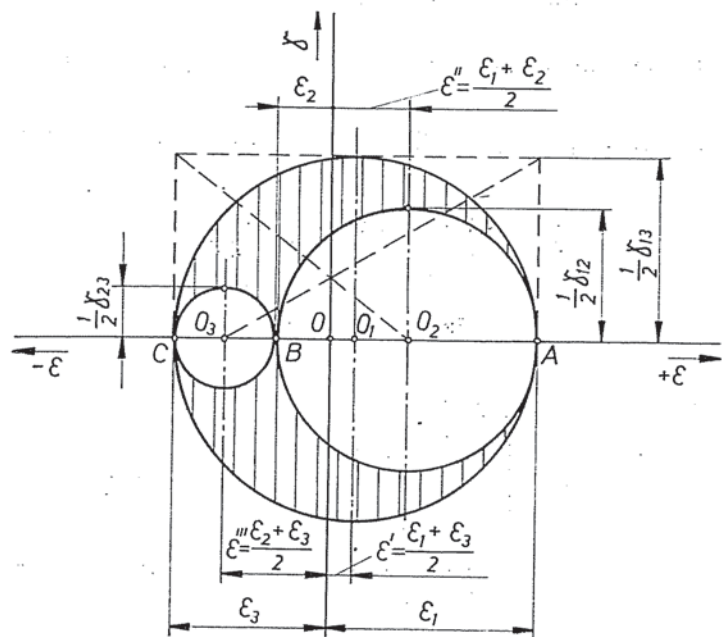
$$\gamma_0 = (0,816 \div 0,941) |\gamma|_{\max} \quad (3.44.b)$$

$$\gamma_c = (1 \div 1,155) |\gamma|_{\max} \quad (3.44.c)$$

$$\varepsilon_c = (1 \div 1,155) |\varepsilon|_{\max} \quad (3.44.d)$$

3.8. MOHR-ov DIJAGRAM DEFORMACIJA

Za male deformacije, slično kao i za napone, može se nacrtati Mohr-ov dijagram deformacija u vidu krugova (Mohr-ovi kru-



Sl. 38. Mohr-ov dijagram deformacija

govi) sa koordinatama ε - γ (sl. 38.).*) Pri ovome ε predstavlja linijsku deformaciju (dilataciju) za neki proizvoljni pravac, a γ je odgovarajuća ugaona deformacija (klizanje).

Kako je pri plastičnom deformisanju tenzor istovremeno i devijator ($\varepsilon_n = 0$), to osa γ uvek preseca dijagram (za razliku od dijagrama napona, gde ordinatna osa može biti pomerena više ili manje od krugova — zavisno od veličine srednjeg napona).

Sve tačke, određene svim mogućim parovima ε - γ , i ovde se (slično kao kod Morovih krugova napona) nalaze unutar šrafirane površine na sl. 38.

Poluprečnici pojedinih krugova definisani su sledećim izrazima:

$$\frac{1}{2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_3); \quad \frac{1}{2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2); \quad \frac{1}{2} (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)$$

3.10. KOEFICIJENT DEFORMACIJE

Najzad, po analogiji sa koeficijentom napona, može se definisati i koeficijent deformacije, kao svojevrstan pokazatelj vrste deformacionog stanja, u obliku

$$v_\varepsilon = \frac{\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} \quad (3.45.)$$

Ovaj izraz takođe proizilazi iz odnosa u Morovom dijagramu, tj.

$$v_\varepsilon = \frac{O_1 B}{O_1 C}$$

i on ukazuje na položaj srednje glavne deformacije ε_2 u dijagramu.

Njegova vrednost se kreće u granicama

$$-1 \leq v_\varepsilon \leq 1$$

Uzimajući u obzir da je, zbog nepromenljivosti zapremine, $\varepsilon_2 = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)$, može se prednji izraz napisati u obliku

$$v_\varepsilon = -3 \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} \quad (3.46.)$$

*) S obzirom da ovi dijagrami važe prvenstveno u oblasti elastičnosti, treba imati u vidu da je njihova primena u oblasti plastičnosti vezana isključivo za male deformacije.

Neki karakteristični iznosi ovog koeficijenta su sledeći

$$\text{za } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} \varepsilon_3: \quad \nu_\varepsilon = 1$$

$$\text{za } \varepsilon_2 = 0; \varepsilon_1 = -\varepsilon_3: \quad \nu_\varepsilon = 0$$

$$\text{za } -\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_3: \quad \nu_\varepsilon = 1$$

Jasno je da će za neku određenu vrednost koeficijenta ν_ε koordinate Mohr-ovog dijagrama biti međusobno slične (proporcionalne).

Napominje se da je u oblasti elastičnosti uvek $\nu_\sigma = \nu_\varepsilon$, ali u oblasti plastičnosti to ne mora biti slučaj.

Ako se pretpostavi homogeno deformisanje nekog tela, onda se za njegove ukupne deformacije u pravcu glavnih osa mogu postaviti slični odnosi kao i za male deformacije, tj.

$$\varphi_1 = -(\varphi_2 + \varphi_3)$$

odnosno

$$|\varphi_1| = |\varphi|_{\max}$$

Sa druge strane, u ovom slučaju se za ma koje deformaciono stanje može kao opšti pokazatelj stepena izvršenog deformisanja koristiti ekvivalentna deformacija

$$\varphi_e = \sqrt{\frac{2}{3} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2)}$$

Kada se ove dve karakteristike dovedu u međusobni odnos, dobija se

$$C_\varphi = \frac{\varphi_e}{|\varphi|_{\max}} \quad (3.47.)$$

za $\varphi_2 = \varphi_1$ biće $\varphi_e = -\varphi_3 = |\varphi|_{\max}$ i $C_\varphi = 1$

za $\varphi_2 = \varphi_3$ biće $\varphi_e = \varphi_1 = |\varphi|_{\max}$ i $C_\varphi = 1$

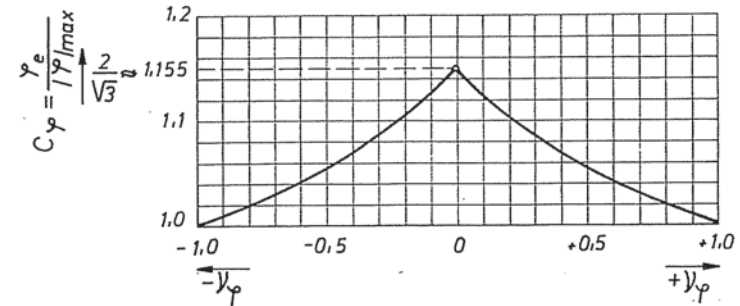
za $\varphi_2 = 0$ tj. $\varphi_1 = -\varphi_3$ biće

$$\varphi_e = \frac{2}{\sqrt{3}} \varphi_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} |\varphi_3| \quad \text{i} \quad C_\varphi = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,15$$

pa je uopšte pokazatelj C_φ zavistan od srednje po veličini glavne deformacije i može se kretati u granicama

$$1 \leq C_\varphi \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,15$$

Međutim, pokazano je napred da je φ_2 takođe u vezi i sa koeficijentom deformacije ν_ε , pa se može uspostaviti zavisnost između C_φ i ν_φ (sl. 39.).



Sl. 39. Odnos između C_φ i ν_φ [3.]

Dakle, ako je za posmatrani proces poznat koeficijent deformacije ν_φ (odn. ν_ε), kao i maksimalna glavna deformacija, onda se pomoću ove zavisnosti može dobiti iznos uopštene deformacije:

$$\varphi_e = C_\varphi |\varphi|_{\max}$$

Najzad, po analogiji sa uglom naponskog stanja φ_σ , može se i ovde na isti način (koristeći konstrukciju uz pomoć Mohr-ovih krugova — analogno sl. 24.) takođe definisati kao pogodna invarijantna karakteristika: ugao deformacionog stanja φ_ε *, pri čemu će biti

$$\operatorname{tg} \varphi_\varepsilon = \frac{\nu_\varepsilon}{\sqrt{3}} \quad (3.48.)$$

3.11. NAKNADNE NAPOMENE U VEZI SA BESKONAČNO MALIM DEFORMACIJAMA

Ranije je naglašeno da se pri obradi metala deformisanjem pojavljuju velike konačne (ukupne) deformacije i da se praktično njihovi iznosi dobijaju na bazi teorije malih priraštaja deformacija (beskonačno malih etapnih deformacija) i njihovog naknadnog sumiranja. Sasvim je očigledno da se i u tom slučaju mogu

*) Oznake za ovaj ugao i logaritamsku deformaciju slučajno su iste (φ)

koristiti sve relacije i pokazatelji izvedeni za male deformacije (jednačine, tenzori, devijatori, invarijante, itd.), s tim što se kao članovi ovih izraza pojavljuju beskonačno mali priraštaji ($\varepsilon_x, \dots, d\gamma_{xy}, \dots$) umesto komponentata malih deformacija ($\varepsilon_x, \dots, \gamma_{xy}, \dots$).

Na primer, uopštena (ekvivalentna) mala deformacija je prema (3.39.)

$$\varepsilon_c = \sqrt{\frac{2}{3}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)}$$

a intenzivnost beskonačno malih priraštaja (ili beskonačno male deformacije):

$$d\varepsilon_c = \sqrt{\frac{2}{3}(d\varepsilon_1^2 + d\varepsilon_2^2 + d\varepsilon_3^2)} \quad (3.49.)$$

(to, dakle, nije diferencijal prethodnog izraza u matematičkom smislu!).

3.12. KOMPATIBILNOST DEFORMACIJA

S obzirom da su komponente deformacija definisane komponentama pomeranja (kao neprekidnim funkcijama koordinata x, y, z), to one ne mogu imati proizvoljne, odnosno međusobno nezavisne, vrednosti. Na ovo može ukazati i sledeće jednostavno rasuđivanje. Ako se zamisli da je telo podeljeno u veći broj malih elemenata, na primer, kubova i da su oni izdvojeni i posebno slobodno deformisani, onda je jasno da se pri njihovom ponovnom vraćanju na prvobitna mesta — u zajedničku celinu — oni više neće moći složiti tako da formiraju telo koje kontinualno ispunjava prostor (pojaviće se, kako šupljine, tako i potreba za međusobnim preklapanjem). To jasno pokazuje da između komponentata deformacija na pojedinim mestima tela mora postojati neka određena i jednoznačna zavisnost, ako se želi da telo i posle deformisanja predstavlja kontinualan skup materijalnih čestica (a to znači i da pomeranja ostanu kontinualne funkcije koordinata). Ta zavisnost je poznata kao kompatibilnost (usaglašenost, spojivost) deformacija, a jednačine koje je izražavaju nazivaju se jednačine kompatibilnosti ili Saint-Venant-ovi uslovi.

Na primer, za slučaj ravanskog stanja, kada deformacija ne zavisi od ose z , biće komponente deformacija:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

Ako se prva jednačina dva puta diferencira po koordinati y , a druga po koordinati x , dobiće se:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_y}{\partial y \partial x^2}$$

Kada se izvrši sabiranje ovih jednačina biće:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial y \partial x^2} =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Na taj način dobijena je jedna jednačina kompatibilnosti, koja pokazuje da će pri određenim iznosima dve deformacije treća automatski dobiti sasvim određenu vrednost.

Na sličan način mogu se izvesti i ostale jednačine, tako da se dobija ukupno sledećih šest jednačina kompatibilnosti:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (3.50.a)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (3.50.b)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \quad (3.50.c)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (3.50.d)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (3.50.e)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (3.50.f)$$

Ove jednačine su nezavisne od svojstava materijala, a važe, kako za oblast plastičnosti, tako i za oblast elastičnosti.

4. BRZINA DEFORMACIJE I NJENE OSNOVNE KARAKTERISTIKE

Napred je pokazano da se pri iznalaženju ukupne (velike, znatne) deformacije moraju najpre odrediti komponente uzastopnih malih deformacija koje, posle sabiranja, dovode do ukupne. Sa druge strane, i ova mala deformisanja su procesi koji se odvijaju u toku vremena, tako da se prirodno nameće potreba određivanja njihove brzine.

Ako, na primer, neki pravolinijski deo l posmatranog tela (u pravou ose x) promeni svoju dužinu u toku beskonačno malog vremenskog intervala dt za dl , biće brzina odgovarajuće komponente deformacije

$$\dot{\varphi}_x = \frac{d\varphi_x}{dt} = \frac{1}{l} \frac{dl}{dt} = \frac{\dot{l}}{l} [\text{sec}^{-1}] \quad (4.1.)$$

Vidi se da ovako definisana brzina deformacije ima i svoju dimenziju.

Jasno je da brzina, kao i sama deformacija, zavisi od pravca. Na primer, u glavnim pravcima biće odgovarajuće brzine malih deformacija: $\dot{\varepsilon}_1$; $\dot{\varepsilon}_2$; $\dot{\varepsilon}_3$, a zbog usvojene pretpostavke $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ mora biti i $\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3 = 0$.

Takođe je očigledno da je u opštem slučaju brzina deformacije različita u različitim tačkama tela koje se deformiše. Ona će biti utoliko veća, ukoliko se brže menja rastojanje između posmatranih tačaka.

Treba pri ovome razlikovati brzinu deformacije od brzine pomeranja materijalne tačke u telu. Na primer, ako se posmatra brzina deformacije pri istezanju dva štapa, od kojih jedan ima dužinu 100 cm a drugi 10 cm, i ako se istezanje vrši brzinom od 10 cm/sec, onda će njihova dužina posle 1 sec. da se poveća u oba slučaja za 10cm. Međutim, prvi štap će za to vreme ostvariti plastičnu deformaciju u iznosu:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l}{l_1} = \frac{10}{100} = 0,1$$

a drugi

$$\varepsilon_{II} = \frac{\Delta l}{l_{II}} = \frac{10}{10} = 1$$

Pretpostavljajući ravnomerno istezanje, može se pisati

$$\varepsilon_I = \frac{\varepsilon_I}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_I}{1} = \varepsilon_I = 0,1 [\text{sec}^{-1}]$$

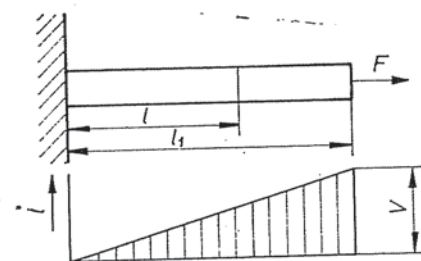
$$\varepsilon_{II} = \frac{\varepsilon_{II}}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_{II}}{1} = \varepsilon_{II} = 1 [\text{sec}^{-1}]$$

tj.

$$\frac{\varepsilon_I}{\varepsilon_{II}} = \frac{l_{II}}{l_I}$$

*brzine
pomeranja*

Jasno je da se pri ovome brzine pomeranja (\dot{l}) pojedinih tačaka tela mogu menjati od nule do maksimuma. Šema ove promene za slučaj istezanja štapa, učvršćenog na jednom kraju data je na sl. 40.



V- BRZINA RADNOG ORGANA MAŠINE KOJI VRŠI ISTEZANJE

Sl. 40. Promena brzine pomeranja pojedinih tačaka duž štapa koji je ravnomerno isteže

Prema tome, na oba posmatrana štapa biće različite brzine pomeranja pojedinih malih elemenata duž ose istezanja, ili, drugim rečima, i pri jednoj istoj brzini deformisanja (odn. kretanja radnog organa mašine) brzine deformacije će biti različite u opštem slučaju i zavisice od apsolutnih dimenzija tela.

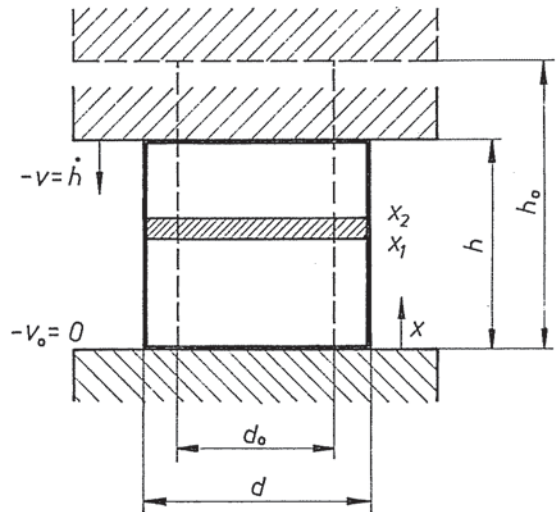
S obzirom da se pri rešavanju praktičnih problema najčešće pretpostavlja homogeno deformisanje, korisno je bliže razmotriti brzinu zbirne — logaritamske deformacije, izražene preko dimenzija čitavog tela. Ako se, na primer, posmatra homogeno sabijanje jednog cilindra prema sl. 41. onda će brzina ove deformacije biti

$$\dot{\varphi} = - \frac{v}{h} = \frac{\dot{h}}{h} \quad (4.2.)$$

gde je ν — brzina kretanja pritiskivača.

U ovom slučaju je brzina elementarnih čestica: $U_c = 0$ za $x = 0$ i povećava se do $\nu_x = \nu_h$ za $x = h$, što znači da je

$$\frac{\nu_x}{x} = \frac{\nu_h}{h}$$



Sl. 41. Sabijanje cilindra brzinom deformisanja ν

Pri rastaju deformacije je pri tome $d\varphi = \dot{\varphi} dt$, a suma svih pri-
raštaja daje ukupnu deformaciju, odnosno stepen deformisanja
(deformacije):

$$\varphi = \int_{t_0}^t \dot{\varphi} dt = - \int_{t_0}^t \frac{\nu}{h} dt = \int_{t_0}^t \frac{h \dot{h}}{h} dt = \int_{h_0}^h \frac{dh}{h} = \ln \frac{h}{h_0} \quad (4.3.)$$

Pri istezanju od dužine l_0 do l biće

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{l}}{l}; \varphi = \ln \frac{l}{l_0}$$

odnosno uopšte, s obzirom na ostale dimenzije (poprečni presek A ,
širinu b , ili prečnik d)

$$\dot{\varphi}_A = \frac{\dot{A}}{A}; \varphi_A = \ln \frac{A}{A_0} \quad (4.4.a)$$

$$\dot{\varphi}_b = \frac{\dot{b}}{b}; \varphi_b = \ln \frac{b}{b_0} \quad (4.4.b)$$

$$\dot{\varphi}_d = \frac{\dot{d}}{d}; \varphi_d = \ln \frac{d}{d_0} \quad (4.4.c)$$

Iz svega što je rečeno može se zaključiti da brzinu kretanja
radnog organa mašine (malja čekića, pritiskivača prese, itd.) ν^*
treba u svakom slučaju razlikovati od brzine deformacije (ε odn.
 $\dot{\varphi}$).

Radi što jasnijeg objašnjenja i raščlanjavanja ovih pojmova,
pogodno je posmatrati slučaj deformisanja pri ispitivanju materi-
jala zatezanjem. Pod normalnim okolnostima ovo ispitivanje se
vrši pri konstantnoj brzini steznih čeljusti mašine. Ova brzina je,
prema prednjem, brzina deformisanja ν (u ovom slučaju brzina is-
tezanja) i iznosi

$$\nu = \dot{l} = \frac{dl}{dt} = \text{const. [m/sec] ili [mm/sec]} \quad (4.5.)$$

a brzina deformacije će zavisiti od trenutne dužine epruvete

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dl}{l dt} = \frac{d[\ln(1 + \varepsilon)]}{dt} = \frac{\dot{l}}{l} = \frac{\nu}{l} \quad (4.6)$$

Vidi se da uopšte izraz za brzinu deformacije zavisi od br-
zine deformisanja, dimenzija tela i pokazatelja deformacije.

U praksi se često, umesto trenutnih, koriste srednje (osred-
njene) brzine deformacija:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \dot{\varphi} dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_1} d\varphi = \frac{\varphi}{\Delta t} = \frac{\ln \frac{l}{l_0}}{\Delta t} = \frac{\ln(1 + \varepsilon)}{\Delta t} = \frac{\ln \frac{l}{l_0} \bar{\nu}}{\Delta t} \quad (4.7.)$$

gde je Δt vreme za koje je izvršeno deformisanje, a $\bar{\nu}$ srednja br-
zina deformisanja prema

* Ova brzina se naziva još i: brzina deformisanja, brzina obrade, brzi-
na procesa deformisanja, brzina alata, ... i može biti promenljiva (kao
kod ekscentarskih presa) ili stalna (kao kod hidrauličnih presa).

$$\bar{v} = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{l - l_0}{\Delta t} \quad (4.8)$$

Naravno da se praktično u nizu slučajeva može raditi i sa brzinom relativne deformacije koja se odnosi na čitavo telo, na primer

$$\varepsilon = \frac{dl}{l_0 dt} \quad (4.9)$$

odnosno sa njenom osrednjenom vrednošću

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\Delta t} \quad (4.10)$$

U opštem slučaju povećanje brzine deformacije dovodi do opadanja plastičnosti i povećanja deformacionog otpora. Zato se pri izračunavanju sila i drugih parametara procesa ovaj uticaj mora uzeti u obzir.

U daljem će biti izvršena bliža analiza brzina malih deformacija i odgovarajućih odnosa.

Neka uopšte brzina linijskog pomeranja materijalnih tačaka bude obeležena simbolom \dot{u} , odnosno njene komponente: \dot{u}_x ; \dot{u}_y ; \dot{u}_z . Ova brzina je, kao i samo pomeranje, neprekidna funkcija koordinata i vremena, tj.

$$\dot{u}_x = f_x(x, y, z, t) \quad (4.11.a)$$

$$\dot{u}_y = f_y(x, y, z, t) \quad (4.11.b)$$

$$\dot{u}_z = f_z(x, y, z, t) \quad (4.11.c)$$

U slučaju malih deformacija mogu se komponente brzine pomeranja izraziti parcijalnim izvodima po vremenu:

$$\dot{u}_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} \quad (4.12.a)$$

$$\dot{u}_y = \frac{\partial u_y}{\partial t} \quad (4.12.b)$$

$$\dot{u}_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} \quad (4.12.c)$$

Ako se posmatraju dve sasvim bliske tačke, onda će brzina deformacije u nekom pravcu biti definisana kao granična vrednost

odnosa razlike brzina pomeranja tih tačaka i njihovog rastojanja, kada ono teži nuli:

$$a) \left[\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \right]$$

odnosno

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t}$$

U istom smislu može se pisati za brzinu ugaone deformacije, tj. brzinu promene ugla između dve ivice zamišljenog elementa zapremine oko materijalne tačke:

$$\dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial x}$$

$$\dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{\partial \dot{\gamma}_{xy}}{\partial t}$$

Na analogan način definišu se i ostale komponente brzine deformacije, tako da se uopšte dobijaju sledeći izrazi za njih:

$$b) \left[\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} \right] \quad (4.13.a)$$

$$\left[\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} \right] \quad (4.13.b)$$

$$\left[\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} \right] \quad (4.13.c)$$

$$\left[\dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial x} = \frac{\partial \dot{\gamma}_{xy}}{\partial t} \right] \quad (4.14.a)$$

$$\left[\dot{\gamma}_{yz} = \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial z} + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial y} = \frac{\partial \dot{\gamma}_{yz}}{\partial t} \right] \quad (4.14.b)$$

$$\left[\dot{\gamma}_{zx} = \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial z} = \frac{\partial \dot{\gamma}_{zx}}{\partial t} \right] \quad (4.14.c)$$

Iz ovoga je moguće zaključiti da se komponente brzine deformacije izražavaju dvojako: a) kao izvodi komponenata brzina pomeranja po sopstvenim koordinatama; b) kao izvodi komponenata malih (etapnih) deformacija po vremenu.

4.1. TENZOR BRZINE DEFORMACIJE. DEVIJATOR.

Prikazane komponente $\dot{\epsilon}_x, \dots, \dot{\gamma}_{xy}, \dots$ obrazuju tenzor brzine deformacije, kojim se u potpunosti definiše stanje brzine deformisanja malog elementa zapremine oko posmatrane tačke:

$$T_{\dot{\epsilon}} = \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_x & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xy} & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xz} \\ \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{yx} & \dot{\epsilon}_y & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{yz} \\ \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{zx} & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{zy} & \dot{\epsilon}_z \end{Bmatrix} \quad (4.15.)$$

Ovaj tenzor je takođe simetričan i poseduje ista svojstva kao i tenzor napona, odnosno deformacije.

S obzirom da se pri plastičnom deformisanju po pretpostavci ne menja zapremina biće srednja brzina $\dot{\epsilon}_m = 0$, a tenzor brzine deformacije se pretvara u devijator (slično kao i tenzor deformacije):

$$\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} = 0 \quad (4.16.)$$

$$\dot{\epsilon}_m = \frac{\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z}{3} = \frac{\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3}{3} = 0 \quad (4.17.)$$

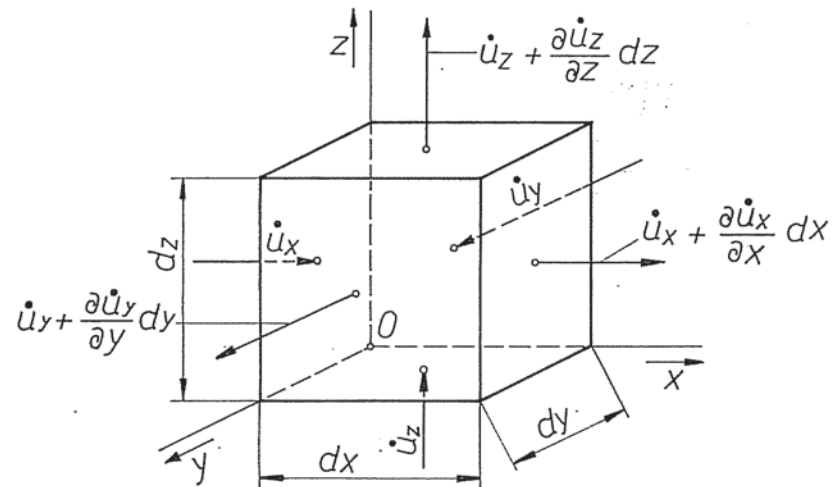
$$D_{\dot{\epsilon}} = \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_m & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xy} & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xz} \\ \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{yx} & \dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_m & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{yz} \\ \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{zx} & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{zy} & \dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_x & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xy} & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xz} \\ \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{yx} & \dot{\epsilon}_y & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{yz} \\ \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{zx} & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{zy} & \dot{\epsilon}_z \end{Bmatrix} = T_{\dot{\epsilon}} \quad (4.18.)$$

Prva jednačina (4.16.) koja se odnosi na polje brzina naziva se još i jednačina kontinuiteta (a u osnovi predstavlja uslov o nepromenljivosti zapremine). Naime, ako se posmatra jedan element prema sl. 42. onda će (s obzirom na $V = \text{const}$) morati da bude zadovoljeno:

$$\dot{u}_x dy dz + \dot{u}_y dx dz + \dot{u}_z dx dy = \left(\dot{u}_x + \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} dx \right) dy dz + \left(\dot{u}_y + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y} dy \right) dx dz + \left(\dot{u}_z + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} dz \right) dx dy$$

iz čega se takođe dobija jednačina kontinuiteta

$$\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} = 0 \quad \checkmark$$



Sl. 42. Komponente brzine deformacije jednog elementa zapremine

Moguće je odrediti i glavne ose brzine deformacije — one u pravcu kojih postoje glavne brzine linijskih deformacija ($\dot{\epsilon}_1; \dot{\epsilon}_2; \dot{\epsilon}_3$) a nema brzina klizanja ($\dot{\gamma}_{xy}; \dot{\gamma}_{yz}; \dot{\gamma}_{zx}$). U jednom glavnom pravcu će u posmatranom trenutku biti najbrže izduženje materijalnog vlakna, a u drugom istovremeno najbrže skraćenje.

Sa ovim komponentama tenzor deformacije dobija oblik

$$T_{\dot{\epsilon}} = \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\epsilon}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\epsilon}_3 \end{Bmatrix} \quad (4.19.)$$

4.2. INVARIJANTE TENZORA BRZINE DEFORMACIJE.
OSTALE UOPŠTENE KARAKTERISTIKE.
MOHR-ovi KRUGOVI.

Kako i tenzor brzina deformacija ima svoje invarijante, koje su sasvim analogne invarijantama tenzora deformacija, mogu se, po već prikazanom postupku, definisati i ostali pokazatelji stanja brzine deformacije («stanja kretanja»): $\dot{\epsilon}_c$; $\dot{\gamma}_c$; $\dot{\gamma}_0$; $\dot{\gamma}_{12}$; $\dot{\gamma}_{23}$; $\dot{\gamma}_{31}$. Takođe se mogu nacrtati odgovarajući Mohr-ovi krugovi. Invarijante tenzora brzina deformacija biće:

$$J_1(T_{\dot{\epsilon}}) = J_1(D_{\dot{\epsilon}}) \equiv \dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3 = 0 \quad (4.20.a)$$

$$J_2(T_{\dot{\epsilon}}) = J_2(D_{\dot{\epsilon}}) \equiv \dot{\epsilon}_x \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_y \dot{\epsilon}_z + \dot{\epsilon}_z \dot{\epsilon}_x - \frac{1}{4}(\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2) = \dot{\epsilon}_1 \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_2 \dot{\epsilon}_3 + \dot{\epsilon}_3 \dot{\epsilon}_1 = -\frac{1}{6}[(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y)^2 + (\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_z)^2 + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x)^2] - \frac{1}{4}(\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2) \quad (4.20.b)$$

$$J_3(T_{\dot{\epsilon}}) = J_3(D_{\dot{\epsilon}}) \equiv \begin{vmatrix} \dot{\epsilon}_x & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xy} & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xz} \\ \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{yx} & \dot{\epsilon}_y & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{yz} \\ \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{zx} & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{zy} & \dot{\epsilon}_z \end{vmatrix} = \dot{\epsilon}_x \dot{\epsilon}_y \dot{\epsilon}_z + \frac{1}{4} \dot{\gamma}_{xy} \dot{\gamma}_{yz} \dot{\gamma}_{zx} - \frac{1}{4} (\dot{\epsilon}_x \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\epsilon}_y \dot{\gamma}_{zx}^2 + \dot{\epsilon}_z \dot{\gamma}_{xy}^2) = \dot{\epsilon}_1 \dot{\epsilon}_2 \dot{\epsilon}_3 \quad (4.20.c)$$

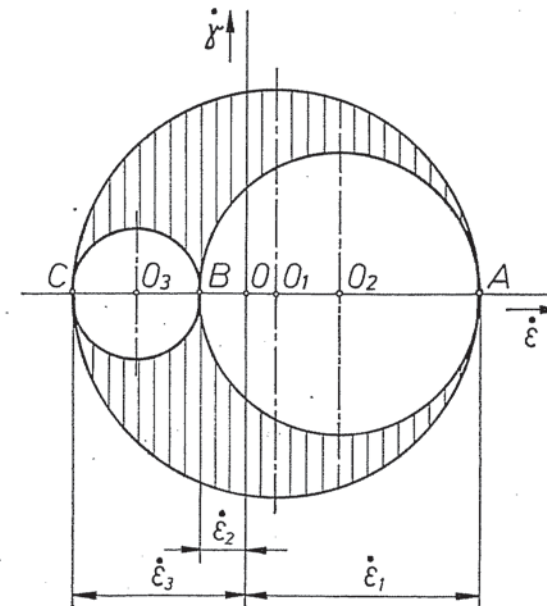
Uopštena (ekvivalentna, efektivna) brzina klizanja biće (po analogiji sa ϵ_c):

$$\dot{\gamma}_c = 2 \sqrt{|J_2(D_{\dot{\epsilon}})|} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y)^2 + (\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_z)^2 + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x)^2 + \frac{3}{2}(\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2)^2 + (\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_3)^2 + (\dot{\epsilon}_3 - \dot{\epsilon}_1)^2} \quad (4.21.)$$

Takođe se za ekvivalentnu linijsku brzinu deformacije može pisati (po analogiji sa ϵ_c):

$$\dot{\epsilon}_c = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y)^2 + (\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_z)^2 + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x)^2 + \frac{3}{2}(\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2)^2 + (\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_3)^2 + (\dot{\epsilon}_3 - \dot{\epsilon}_1)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\dot{\epsilon}_1^2 + \dot{\epsilon}_2^2 + \dot{\epsilon}_3^2) \quad (4.22.)$$



Sl. 43. Mohr-ov dijagram brzina deformacija

što predstavlja veoma pogodan invarijantan pokazatelj brzine deformisanja posmatrane čestice, jer je u slučaju ravnomernog istezanja ili skraćivanja u pravcu ose 1: $\dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_3$; $\dot{\epsilon}_c = \dot{\epsilon}_1$

Brzina oktaedarskog klizanja je

$$\dot{\gamma}_0 = \frac{2}{3} \sqrt{(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y)^2 + (\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_z)^2 + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x)^2 + \frac{3}{2}(\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2)} =$$

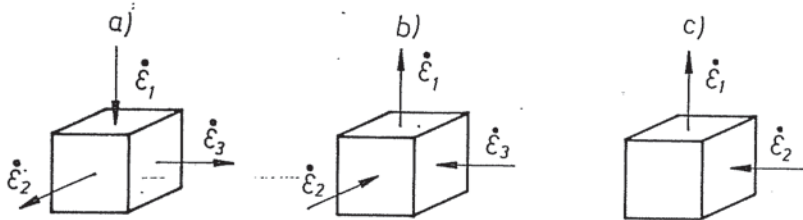
$$= \frac{2}{3} \sqrt{(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2)^2 + (\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_3)^2 + (\dot{\epsilon}_3 - \dot{\epsilon}_1)^2} \quad (4.23.)$$

I u ovom slučaju se, dakle, pojedini pokazatelji stanja brzina deformacija razlikuju međusobno samo u iznosu koeficijenta ispred korena, a predstavljaju skalarne invarijante veličine, jer su proizašli iz invarijante tenzora brzina deformacija.

Mohr-ov dijagram brzina deformacija ima izgled prema sl. 43.

4.3. MEHANIČKE ŠEME I KOEFICIJENT BRZINE DEFORMACIJE

Moguće je, kao i ranije, koristiti pogodnu jednostavnu šemu za pregledno izražavanje stanja brzine deformacije pomoću glavnih brzina (sl. 44.)



Sl. 44. Šeme različitih stanja brzina deformacija (stanja kretanja)

Koeficijent brzine deformacije ima takođe sličan oblik i smisao kao i koeficijenti v_{σ} i v_{ϵ} , tj.

$$v_{\epsilon} = \frac{\dot{\epsilon}_2 - \frac{\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_3}{2}}{\frac{\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3}{2}} = \frac{2\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3}{\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3} \quad (4.24.)$$

4.4. MONOTONI PROCES DEFORMISANJA I NJEGOVI USLOVI

Da bi bilo moguće doći do velike (ukupne) deformacije sabiranjem većeg broja uzastopnih malih deformacija, potrebno je da tok procesa bude jednoznačno određen u tom smislu što će se on sve vreme odvijati monotono. To znači da se dve ma koje ma-

terijalne tačke posmatrane zapremine tela u toku čitavog procesa jedna drugoj približavaju ili udaljavaju, pri čemu deformaciona šema ostaje nepromenjena. Osim toga, pri monotonom procesu deformisanja pravci glavnih osa i deformacija se poklapaju, dok u slučaju nemonotonog deformisanja pravci glavnih osa deformacije u toku procesa menjaju svoj položaj u odnosu na glavne ose napona (na primer, pri opitu zatezanjem posle početka lokalizovanja deformisanja).

Da bi se ovakav proces ostvario, potrebno je, u osnovi, da budu ispunjena sledeća dva uslova.

a) Da je materijalno vlakno posmatranog elementa koje se u dotičnoj etapi najbrže izdužuje (ili skraćuje) i u svim prethodnim etapama takođe bilo najbrže izduživano (skraćivano). To znači da glavne ose brzina deformacija moraju u toku čitavog procesa da se poklapaju sa istim materijalnim vlaknima. Drugim rečima, pravac vlakna koje najbrže menja svoju dužinu poklapa se sa pravcem najvećeg ukupnog izduženja (prvom glavnom osom deformacije).

b) Da se u toku procesa ne menja koeficijent v_{ϵ} , koji po definiciji karakteriše malu deformaciju u trenutku prelaska iz prethodne u posmatranu etapu. To praktično znači da glavne komponente brzine deformacije mogu u toku procesa i da se menjaju, ali se pri tome odnos između njih mora održati stalnim (tj. ove komponente se mogu menjati proporcionalno jednom zajedničkom parametru).

Napominje se da su ovi uslovi u slučaju malih (etapnih) deformacija ispunjeni, tako da je tada proces uvek monoton.

U literaturi se mogu naći i nešto drukčije definicije monotone deformisanja. Na primer, prema Smirnov-Aljaev-u [63] monotono je takvo deformisanje pri kojem materijalne tačke, koje se nalaze na glavnim osama deformacije u početku deformisanja, ostaju na tim osama i za čitavo vreme procesa, bez obzira na to što te glavne ose u opštem slučaju mogu i promeniti svoju orijentaciju u odnosu na nepomični koordinatni sistem koji odgovara čitavom telu. To znači da od svih vlakana koja prolaze kroz posmatranu tačku, najveću promenu dužine u toku čitavog procesa ima uvek je jedno isto vlakno. Pravci takvih vlakana, dakle, padaju u pravce glavnih osa.

5. DEFORMACIONA ČVRSTOĆA. USLOVI PLASTIČNOSTI.

5.1. OSNOVNA RAZMATRANJA

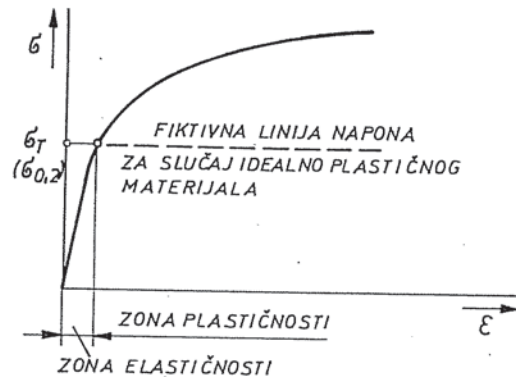
Da bi u telu nastalo plastično deformisanje potrebno je da budu zadovoljeni određeni uslovi s obzirom na veličinu i međusobni odnos napona koje u njemu izazivaju spoljne sile. Ovi uslovi, zapravo, izražavaju vezu između napona u telu i jedne kritične vrednosti tzv. napona plastičnog tečenja, kao pokazatelja koji karakteriše prelazak materijala u stanje plastičnosti.

Na primer, pri jednoosnom zatezanju plastično deformisanje nastaje (kada odgovarajući glavni normalni napon u materijalu dostigne iznos granice tečenja (razvlačenja) σ_T , tj.

$$\sigma_1 = \sigma_T \approx \sigma_{0,2} \quad (5.1.)$$

pri čemu je:

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$$



Sl. 45. Područja elastičnosti i plastičnosti pri jednoosnom zatezanju

Ako bi telo bilo idealno plastično, onda bi se ova veličina napona zadržala za sve vrednosti deformacije (odsustvo tzv. defor-

macionog očvršćivanja — v. dalje stavove). To, međutim, najčešće nije realna pretpostavka i može se eventualno usvojiti samo radi uprošćenja razmatranja u nekim slučajevima (naročito pri deformisanju u toplom stanju). Inače, u stvarnosti na normalnim temperaturama ovaj napon u metalima u području plastičnosti neprekidno raste (postoji deformaciono očvršćivanje ili ojačavanje sve dok ne nastupi razaranje — sl. 45.). Napominje se da bi u slučaju rasterećenja posle dostizanja nekog iznosa plastične deformacije, pri ponovnom naprezanju granica tečenja (napon tečenja) bila povećana i odgovarala bi onom naponu koji je postojao u telu neposredno pre rasterećenja. To, dakle, znači da se napon tečenja u području plastičnosti menja sa promenom stepena deformacije i da u svakom trenutku odgovara nekoj kritičnoj vrednosti.

Ova kritična vrednost napona tečenja naziva se *deformaciona čvrstoća (K)**.

Ona se određuje eksperimentalno i to najčešće jednoosnim zatezanjem ili pritiskivanjem (sabijanjem), jer je pri jednoosnom naprezanju, uopšte, uslov za nastajanje i održavanje plastičnosti (plastičnog tečenja materijala):

$$\sigma_1 = K \quad (5.2.)$$

Iz ovoga proizilazi da se deformaciona čvrstoća može definisati kao napon koji pri jednoosnom naponskom stanju dovodi do plastičnog tečenja, odnosno do održavanja ovog tečenja (ukoliko je ono već u toku).

Međutim, obrada metala deformisanjem najčešće se vrši u uslovima složenijih naponskih stanja. Tada prelazak tela (ili nekog njegovog elementa) u stanje plastičnosti određuju opšti uslovi plastičnosti koji moraju imati univerzalan karakter, tj. važiti za ma koju šemu naponskog stanja.

Uopšte je prelazak neke elementarne čestice tela u stanje plastičnosti uslovljen: a) odnosima između napona (naponskim stanjem) i b) mehaničkim svojstvima materijala pri datim temperaturnim i brzinskim uslovima. Zato su za kvantitativno izražavanje ovih uslova u konkretnim slučajevima neophodni odgovarajući eksperimentalni podaci.

Kriterijumi za prelazak u stanje plastičnosti nisu jedinstveni. Postoji nekoliko hipoteza na kojima se oni zasnivaju. Među

*) U literaturi se sreću različiti nazivi za ovu karakteristiku (napon tečenja, granica tečenja, deformacioni otpor, ...), a u literaturi na našem jeziku najčešće se koristi naziv specifični otpor deformacije. On je, međutim, ovde izbegnut zbog relativne glomaznosti i usvojen je naziv deformaciona čvrstoća. Kao takav on se koristi naročito u nemačkom jeziku, a i u našem ima svoj puni smisao, jer adekvatno odražava suštinu pojma.

njima najširu primenu i zadovoljavajuću eksperimentalnu potvrdu našle su sledeće dve:

— hipoteza o stalnosti (postojanosti) maksimalne (granične) energije elastične promene oblika (energetski uslov plastičnosti);

— hipoteza najvećeg smičućeg napona.

5.2. ENERGETSKI USLOV PLASTIČNOSTI (ENERGETSKA HIPOTEZA)

Najpotpuniju eksperimentalnu potvrdu našao je ovaj uslov plastičnosti, a njega su razradili: M. Huber (1904), R. von Mises (1913), i H. Hencky (1924). Otuda se u literaturi često i naziva prema imenima ovih naučnika: Huber-Hencky-Mises-ov kriterijum, ili Huber-Mises-ov, odn. Mises-Hencky-jev, a najčešće samo Mises-ov kriterijum (uslov).

Energetska hipoteza na kojoj počiva ovaj uslov plastičnosti glasi: da bi nastalo plastično deformisanje u napregnutom telu, količina unutrašnje energije elastične promene oblika, po jedinici zapremine (specifična energija), treba da dostigne jedan konstantan iznos u datim uslovima (s obzirom na temperaturu, brzinu i stepen deformacije). Ova kritična energija ne zavisi od mehaničke naponsko-deformacione šeme, već samo od svojstava materijala u tim uslovima.

Drugim rečima, materijal može specifičnu potencijalnu energiju promene oblika u oblasti elastičnosti (koja se u njemu skuplja sve do početika plastičnog deformisanja) povećavati samo do određenog iznosa, posle čega nastupa stanje plastičnosti.

Ovaj uslov se može izraziti analitički na pogodan način.

U teoriji elastičnosti je poznato da se za slučaj prostornog naponskog stanja mogu specifični radovi (energije) elastičnog deformisanja u pojedinim glavnim pravcima dobiti na taj način što će se komponente elastičnih deformacija, izražene preko generalisanog Hukovog zakona, pomnožiti odgovarajućim naponima i uzeti jedna polovina tog proizvoda (na primer, pri jednoosonom istezanju u oblasti elastičnosti rad bi bio jednak površini trougla ispod pravolinijskog dela dijagrama $\sigma_1 - \epsilon$)*. Stoga će ukupan

* Ne moraju u pitanju biti samo glavni pravci, jer je uopšte specifična potencijalna energija koja se sakupi u telu usled dejstva na koje komponente normalnog napona, na pr. σ_x :

$$\text{itd.} \quad \Delta W_x = \frac{\sigma_x dy dz \epsilon_x dx}{2dV} = \frac{\sigma_x \epsilon_x dV}{2dV} = \frac{\sigma_x \epsilon_x}{2}$$

specifičan rad (dakle, po jedinici zapremine) biti uopšte

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad \checkmark \quad (5.3)$$

odnosno

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3) \quad (5.4)$$

dok su pojedine komponente elastičnih deformacija (prema teoriji elastičnosti):

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} \left[\sigma_1 - (\sigma_2 + \sigma_3) \mu_P \right] \quad (5.5.a)$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E} \left[\sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_3) \mu_P \right] \quad (5.5.b)$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{E} \left[\sigma_3 - (\sigma_1 + \sigma_2) \mu_P \right] \quad (5.5.c)$$

gde je: μ_P — Poisson-ov koeficijent (v. poglavlje 6.1);

E — modul elastičnosti materijala.

Uzimajući ovo u obzir, biće specifični radovi u pojedinim pravcima

$$\Delta W_1 = \frac{1}{2} \sigma_1 \epsilon_1 = \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 - (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3) \mu_P \right] \quad (5.6.a)$$

$$\Delta W_2 = \frac{1}{2} \sigma_2 \epsilon_2 = \frac{1}{2E} \left[\sigma_2^2 - (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3) \mu_P \right] \quad (5.6.b)$$

$$\Delta W_3 = \frac{1}{2} \sigma_3 \epsilon_3 = \frac{1}{2E} \left[\sigma_3^2 - (\sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3) \mu_P \right] \quad (5.6.c)$$

odnosno ukupan specifičan rad elastičnog deformisanja

$$W = \sum_1^3 \Delta W_i = \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu_P (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \right] \quad (5.7)$$

Poznato je, dalje, da se ova ukupna energija troši, kako na promenu oblika (W_o), tako i na promenu zapremine (W_v). Međutim, deo energije koji se odnosi na promenu zapremine suštinski ne utiče na početak plastičnog deformisanja, bez obzira na to da li je veliki ili mali (ranije je već istaknuto da ravnomeran svestrani pritisak — »hidrostatički pritisak« — ili zatezanje ne dovode do pro-

mene oblika, već samo mogu izazvati promenu zapremine). Iz toga proizlazi logičan zaključak da se prednji izraz ne može koristiti za postavljanje uslova plastičnosti, već je za to potrebno da se najpre izvrši oduzimanje onog dela energije koji se troši na promenu zapremine. Taj deo se može izraziti u obliku

$$W_v = \frac{1}{2} (\sigma_m \varepsilon_m + \sigma_m \varepsilon_m + \sigma_m \varepsilon_m) = \frac{3}{2} \sigma_m \varepsilon_m \quad (5.8.)$$

ili

$$W_v = \frac{3}{2} \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \cdot \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}$$

(jer promena zapremine zavisi od iznosa srednjeg normalnog napona, a u oblasti elastičnosti je $\varepsilon_m \neq 0$), pa će posle uvođenja prednjih izraza za $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ biti

$$W_v = \frac{1 - 2\mu_p}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (5.9.)$$

Prema tome, traženi specifični rad koji se troši na promenu oblika je (posle zamene i pogodnog sređivanja):

$$W_o = W - W_v = \frac{1 + \mu_p}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \quad (5.10.)$$

Pri jednoosnom naprezanju biće $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, a na granici tečenja je $\sigma_1 = \sigma_T = K$ zbog čega na njoj mora biti

$$W_{oT} = \frac{1 + \mu_p}{3E} K^2 = \text{const.} \quad (5.11.)$$

Kako ova specifična energija, prema usvojenoj hipotezi, ne zavisi od naponsko-deformacione šeme, može se pisati da je uopšte $W_{oT} = W_o$ iz čega proizlazi opšti analitički izraz za energetski uslov plastičnosti:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = K \quad (5.12.)$$

Leva strana ove jednačine odgovara napred definisanom uopštenom naponu (ekvivalentnom naponu), pa se uslov za nastajanje plastičnog deformisanja takođe može pisati kao

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_{ek} = K \quad (5.13.)$$

tj. plastično deformisanje može nastati tek onda kada uopšteni napon σ_e dostigne kritičnu vrednost σ_{ek} jednaku deformacionoj čvrstoći materijala K .

Do sada je bilo reči samo o radu glavnih normalnih napona. Međutim, u opštem slučaju ovi naponi ne moraju biti glavni, pa se tada ukazuje i potreba za izražavanjem rada smičućih napona. Po analogiji sa prednjim, može se pisati da je on uopšte

$$\Delta W_\tau = \frac{1}{2} \tau \gamma = \frac{\tau^2}{2G} \quad (5.14.)$$

$$\left(\gamma = \frac{\tau}{G} \right)$$

jer je, na primer za τ_{xy}

$$W_{xy} = \frac{\tau_{xy} dy dz \gamma_{xy} dx}{2 dV} = \frac{\tau_{xy} \gamma_{xy}}{2}$$

gde je G — modul klizanja koji se može izraziti preko modula elastičnosti E (za slučaj da je $\mu_p = 0,5$ biće $G = E/3$), tj.

$$\Delta W_\tau = \frac{3}{2} \frac{\tau^2}{E} \quad (5.15.)$$

Ukupan rad smičućih napona biće

$$W_\tau = \sum_1^3 \Delta W_{\tau_i} = \frac{3}{2E} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (5.16.)$$

Sada se može izraziti ukupan rad elastičnog deformisanja pomoću ma kojih komponenta napona (v. jednačine 5.7. i 5.16.):

$$W = \sum_1^3 \Delta W_\sigma + \sum_1^3 \Delta W_\sigma = \frac{1}{2E} \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] \quad (5.17.)$$

Ako se ovaj izraz pomnoži sa $4E$ (dakle, konstantom) i izvrši slična transformacija kao ranije (v. na primer analognu transformaciju prikazanu u fusnoti posle jedn. 2.39., ili 3.36.) dobiće se:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = \text{const.}$$

S obzirom da ovo važi za sva naponska stanja, važiće i za jednoosno, kada se dobija da je

$$2\sigma_1^2 = \text{const.} = 2\sigma_T^2 = 2K^2$$

što znači da se tražena konstanta može odrediti jednoosnim naponanjem, a ona onda ima univerzalan karakter, pa je

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 2K^2$$

Vidi se da ovaj izraz takođe odgovara izrazu za uopšteni napon u funkciji opštih naponskih komponenata (v. jedn. 2.44.), tako da se energetski uslov plastičnosti može u najopštijem obliku izraziti kao

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \sigma_{ek} = K \quad (5.18.)$$

Kritična vrednost $\sigma_{ek} = K$ na početku deformisanja odgovara granici tečenja (razvlačenja) σ_T ili $\sigma_{0.2}$ koja se dobija standardnim laboratorijskim ispitivanjem materijala zatezanjem. Kasnije, u toku plastičnog deformisanja, taj napon zbog deformacionog očvršćavanja stalno raste i odgovara stvarnom trenutnom naponu pri jednoosnom zatezanju (ili pritiskivanju bez trenja), odnosno uopšte deformacionoj čvrstoći K (naponu tečenja). Na razliku između granice tečenja (koja se obično daje kao normalan podatak o mehaničkom kvalitetu materijala) i ovog tekućeg napona tečenja treba obratiti posebnu pažnju, da se u tom smislu ne bi napravila greška (zato je bolje koristiti se oznakom K , koja samo u početku deformisanja ima iznos $K = \sigma_T = \sigma_{0.2}$).

Da bi se održalo stanje plastičnosti, mora sa porastom deformacione čvrstoće K porasti u istom iznosu i uopšteni napon σ_e .

Ako je u pitanju obrada u toplom stanju, onda se umesto stvarnog napona tečenja (deformacione čvrstoće) često praktično koristi zatezna čvrstoća materijala σ_M (odnosno σ_{1M} prema ranije korišćenim oznakama), dobijena opitom zatezanjem na istoj temperaturi, jer se na dovoljno visokim temperaturama ove dve karakteristike mnogo ne razlikuju (odsustvo očvršćavanja materijala usled obavljanja rekristalizacije strukture u toku deformisanja).

Napominje se da u svakom slučaju treba voditi računa o potrebi eventualnih daljih korekcija ovih vrednosti s obzirom na brzinu deformacije (ako se brzina pri obradi znatno razlikuje od brzine pri ispitivanju materijala), o čemu će kasnije biti još reči.

Kada se ovako definisan energetski uslov plastičnosti dovede u vezu sa izrazom za oktaedarski smičući napon, dobija se

$$\tau_0 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} K \approx 0,5 K \quad (5.19.)$$

pa se isti uslov plastičnosti može formulisati i na sledeći način: za nastanak stanja plastičnosti, pri ma kakvoj naponsko-deformacionoj šemi, potrebno je da oktaedarski smičući napon dostigne granični (kritični) iznos, koji je približno jednak polovini deformacione čvrstoće. Zato se on takođe naziva i uslov graničnog oktaedarskog smičućeg napona.

Isto tako, ovaj uslov plastičnosti može se izraziti i preko uopštenog smičućeg napona:

$$\tau_c = \frac{1}{\sqrt{3}} K \approx 0,58 K$$

tj. i uopšteni smičući napon mora dostići jedan sasvim određen iznos da bi moglo nastati plastično deformisanje.

Pogodno je, zbog kasnijeg korišćenja ove veličine, da se uvede oznaka

$$\frac{1}{\sqrt{3}} K = 0,578 K \approx 0,58 K = k \quad (5.20.)$$

koja se naziva konstantna plastičnost.

Ukoliko se umesto glavnih normalnih napona u prednje izraze uvrste odgovarajući glavni smičući naponi, uslov plastičnosti dobija sledeći oblik

$$\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2 = 0,5 K^2 \quad (5.21.)$$

ali se on manje koristi.

Zbog navedenih različitih mogućnosti izražavanja, ovaj, u suštini isti, uslov plastičnosti u literaturi nosi sledeće različite nazive:

- energetski uslov plastičnosti (ili hipoteza konstantne energije elastične promene oblika; odnosno samo-hipoteza promene oblika);
- uslov stalnosti (postojanosti) intenzivnosti normalnih napona;
- uslov stalnosti (postojanosti) oktaedarskog smičućeg napona;
- uslov stalnosti (postojanosti) intenzivnosti smičućih napona;
- Mises-ov kriterijum
- ev. drugi nazivi.

5.3. HIPOTEZA NAJVEĆEG SMIČUĆEG NAPONA

Prema ovoj hipotezi, koju su još u prošlom veku predložili H. Tresca (1864.) i Saint-Venant (1870)*, plastično tečenje u materijalu može početi kada najveći smičući glavni napon dostigne jednu određenu vrednost. Ova vrednost zavisi samo od svojstava materijala i uslova deformisanja (temperatura, brzina i stepen deformacije), a ne zavisi od veličine druga dva smičuća napona, odnosno naponsko-deformacione šeme (naponskog stanja). To znači da za svaki slučaj u posmatranom trenutku mora biti zadovoljen uslov

$$|\tau_{\max}^{**}| = \text{const.} = k_s \quad \mathcal{J} \quad (5.21.)$$

gde je k_s — smicajna deformaciona čvrstoća, zavisna od vrste materijala, koja se može odrediti eksperimentalno čistim smicanjem.

Prema ranijim zaključcima (v. jedn. 2.11.), najveći smičući napon može se izraziti preko odgovarajućih glavnih normalnih napona kao

$$\tau_{31} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) = \tau_{\max} \quad \mathcal{J}$$

i on deluje u ravnima koje su nagnute pod uglom od 45° u odnosu na ose 1—3.

Iz toga proizlazi da po ovoj hipotezi nastajanje i održavanje stanja plastičnosti nije zavisno od iznosa srednjeg normalnog napona (što nije bio slučaj sa prvom hipotezom).

Kako je pri jednoosnom zatezanju $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, napon τ_{\max} će, očigledno, biti jednak polovini normalnog. Sa druge strane, taj normalni napon mora dostići iznos deformacione čvrstoće K da bi se ostvarilo stanje plastičnosti, pa se ovaj uslov plastičnosti može napisati kao

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{K}{2} = k_s \quad (5.23.)$$

Odnosno

$$\sigma_1 - \sigma_3 = K \quad \mathcal{J} \quad (5.24.)$$

i uopšte

$$|\sigma_{\max} - \sigma_{\min}| = K \quad (5.25.)$$

*) Otuđa se često ovaj uslov naziva Treskin ili Tresca-Venant-ov uslov plastičnosti (a ponekad i Tresca-Mohr-ov).

**) S obzirom da je pri ovome od interesa isključivo apsolutni iznos smičućeg napona, to će se u daljem izostaviti, kako znači \pm tako i oznaka za apsolutnu vrednost, tj. ona će se uvek podrazumevati.

Dakle, da bi se u nekoj tački napregnutog tela ostvarilo stanje plastičnosti pri ma kojoj naponsko-deformacionoj šemi potrebno je da maksimalni smičući napon u materijalu dostigne vrednost koja je jednaka polovini odgovarajuće deformacione čvrstoće (napona tečenja).

Takođe se može reći da će uslov plastičnosti biti ispunjen onda kada razlika između maksimalnog i minimalnog glavnog normalnog napona dostigne vrednost jednaku deformacionoj čvrstoći.

Značajno je pri ovome zapaziti da se vrednosti glavnih smičućih napona ne menjaju ako se glavni normalni naponi povećaju ili smanje za isti iznos. Drugim rečima, delovanje ravnomernog pritiska ili zatezanja na napregnuto telo ne može uticati na stanje plastičnosti, jer se njime ne menjaju glavni smičući naponi (pa ni maksimalni τ_{\max} !).

5.4. UPOREĐENJE IZMEĐU DVA USLOVA PLASTIČNOSTI

Uslov smičućeg napona, dakle, uzima u obzir samo najveći i najmanji glavni normalni napon, dok je uticaj srednjeg napona σ_2 zanemaren (da bi se ocenilo koji je napon srednji mora se uzeti u obzir i njegov znak, tj. algebarska vrednost — svaki pozitivan napon je veći od ma kojeg negativnog, bez obzira na njegovu apsolutnu veličinu). Samo po sebi se postavlja pitanje koliko je opravdano zanemarivanje ovog napona, odnosno koliko se greška time čini u odnosu na energetski uslov plastičnosti (koji je potpuno, jer uključuje uticaj sva tri glavna normalna napona).

Da bi se na ovo pitanje odgovorilo, poćiće se najpre od ekstremnih slučajeva, kada je:

$$a) \quad \sigma_2 = \sigma_1$$

$$b) \quad \sigma_2 = \sigma_3$$

Ako se ove jednakosti uključe u energetsku jednačinu plastičnosti, dobiće se oba puta: $\sigma_1 - \sigma_3 = K$, iz čega se može zaključiti da u tim slučajevima zanemarivanje napona σ_2 prema drugoj hipotezi nema nikakav značaj.

Da bi se našlo najveće odstupanje (greška) pretpostaviće se da je napon σ_2 između ovih ekstremnih iznosa, tj.

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad ?$$

*) Do ovog zaključka je došao najpre Tresca kada je, izučavajući proces isticanja metala kroz otvore pod uticajem pritiska, ustanovio da za nastajanje i održavanje stanja plastičnosti nisu od uticaja veličine glavnih normalnih napona, već samo njihova razlika.

Tada se prema jedn. (5.12.) dobija

$$|\sigma_1 - \sigma_3| = \frac{2}{\sqrt{3}} K \approx 1,15 K = K' = 2k \quad (5.26.)$$

što znači da je u tom slučaju razlika između kriterijuma na osnovu ove dve hipoteze oko 15% i to je, ujedno, najveća moguća razlika.

Napomena: do ovog odnosa se može doći i na osnovu sledećeg razmatranja. Rad koji se troši na promenu oblika za slučaj jednoosnog naprezanja biće, prema ranije navedenim odnosima (5.11.)

$$W_0 = \frac{1 + \mu_p}{3E} K^2$$

a kako je za slučaj čistog smicanja

$$\sigma_1 = +\tau; \quad \sigma_3 = -\tau$$

zamenom u (5.12.) dobija se

$$W_0 = \frac{1 + \mu_p}{E} \tau^2$$

Pri postizanju stanja plastičnosti moraju ovi radovi biti jednaki, jer prema energetske hipotezi njihov iznos ne može zavistiti od naponske šeme. Zato je

$$\frac{1 + \mu_p}{3E} K^2 = \frac{1 + \mu_p}{E} \tau_{\max}^2$$

$$\tau_{\max} = \frac{K}{\sqrt{3}} = 0,578 K \approx 0,58 K = k$$

odnosno

$$|\sigma_1 - \sigma_3| = 2\tau_{\max} \approx 1,15 K$$

Drugim rečima, najveći iznos koji može dostići glavni smičući napon pri plastičnom deformisanju je

$$\tau_{13} = \tau_{\max} = \pm k \quad (5.27.)$$

Može se zapaziti, uzimajući u obzir navedene relacije za ravansko deformaciono stanje (3.12.), da ovakav međusobni odnos normalnih napona upravo odgovara tom stanju ($\epsilon_2 = 0$), što znači da je za slučaj ravanskog deformacionog stanja razlika između dva navedena kriterijuma plastičnosti najveća.

Da bi se ovo moguće odstupanje uzelo u obzir, pogodno je kriterijum smičućeg napona napisati u obliku

$$|\sigma_1 - \sigma_3| = \beta K \quad (5.28.)$$

odnosno

$$|\sigma_{\max} - \sigma_{\min}| = \beta K \quad (5.29.)$$

ili

$$\tau_{\max} = 0,5\beta K \quad (5.30.)$$

gde je β koeficijent (poznat kao Lode-ov koeficijent) koji uzima u obzir uticaj zanemarenog napona σ_2 , a njegova veličina se kreće u granicama:

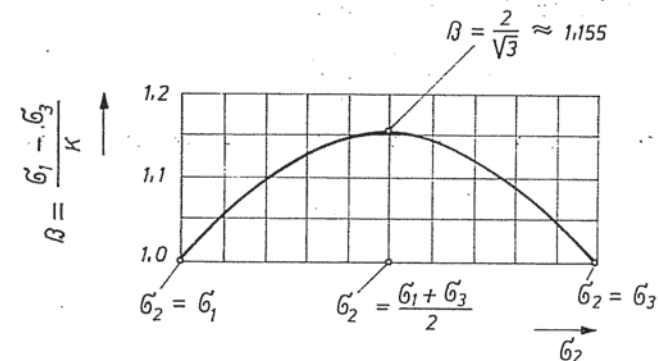
$$1 \leq \beta \leq 1,15$$

Tačnije rečeno, ovo više i nije kriterijum postojanosti maksimalnog smičućeg napona, već energetske uslov plastičnosti napisan na uprošćen način (jer zbog promenljivosti β ni veličina τ_{\max} nije stalna).

Kada je $\beta = 1$ onda je $\sigma_2 = \sigma_1$ ili $\sigma_2 = \sigma_3$, a za $\beta = 1,15$ u pitanju je ravansko deformaciono stanje: $\sigma_2 = 0,5 (\sigma_1 + \sigma_3)$.

Treba napomenuti da se često pri analitičkim razmatranjima ove razlike pojednostavlju i radi sa približno srednjom vrednošću koeficijenta β , odnosno uzima se $\beta \approx 1,1$. Osim toga, može se ukazati na izvesnu podudarnost, odnosno analogiju, ovog koeficijenta sa pokazateljima C_σ i C_τ definisanim jednačinama (2.51.) i (3.47.).

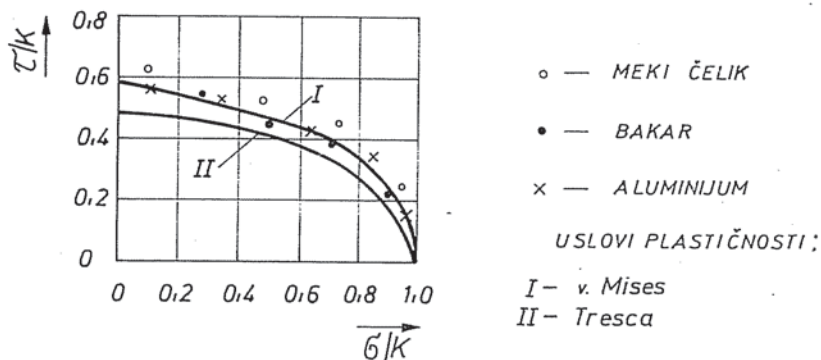
Uopšte uzeto, uslov plastičnosti, jednostavno izražen jednačinama (5.28.—5.30.), treba smatrati tačnim ukoliko se u njega uvrste odgovarajuće tačne vrednosti koeficijenta β , a inače je samo približan.



Sl. 46. Vrednosti koeficijenta β u zavisnosti od glavnog normalnog napona σ_2 (srednjeg po veličini — u algebarskom smislu)

Na sl. 46. prikazana je grafički promena koeficijenta β u zavisnosti od srednjeg po veličini napona σ . Proveru te zavisnosti vršio je W. Lode, a i drugi (M. Roš, A. Eichinger, ...).

Da bi se izvršila eksperimentalna provera obe hipoteze vršena su brojna ispitivanja. Na sl. 47. su navedeni rezultati takvih ispitivanja koje su vršili Taylor i Quinney [72], pri čemu su primenjivali kombinaciju zatežućeg i torzionog napreznja. Vidi se da između odgovarajućih krivih postoji u opštem slučaju razlika koja je u skladu sa napred izvednim odnosima.



Sl. 47. Rezultati eksperimentalnog određivanja uslova plastičnosti na osnovu hipoteza koje su postavili v. Mises i Tresca (prema Taylor-u i Quinney-u)

Ranije je pokazano da položaj srednjeg normalnog napona u Mohr-ovom dijagramu određuje koeficijent napona ν_σ . Zato je prirodno da između koeficijenata β i ν_σ postoji određena zavisnost. Naime, iz izraza za ν_σ (2.49.) dobija se

$$\sigma_2 = \frac{\nu_\sigma (\sigma_1 - \sigma_3)}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

a kada se ovo uvrsti u jednačinu za energetski uslov plastičnosti biće

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2}{\sqrt{3 + \nu_\sigma^2}} K$$

Kako je istovremeno

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \beta K$$

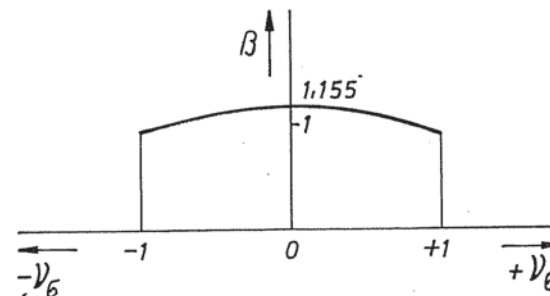
proizlazi da je

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{3 + \nu_\sigma^2}} \quad \text{J} \quad (5.31.)$$

Ova zavisnost između koeficijenata β i ν_σ prikazana je i grafički na sl. 48.

Pri korišćenju uslova plastičnosti u obliku $\sigma_1 - \sigma_3 = \beta K$ uvek se mora voditi računa o znaku napona, jer svaki od njih može biti i zatežujući (+) i pritiskujući (—), pa se u najopštijem slučaju može pisati

$$(\pm \sigma_1) - (\pm \sigma_3) = \beta K$$



Sl. 48. Promena koeficijenta β u zavisnosti od koeficijenta napona ν_σ

Na primer, za slučaj ravanskog naponskog stanja biće $\sigma_2 = 0$ i zato treba voditi računa o tome da li su σ_1 i σ_3 istog ili suprotnog znaka. U prvom slučaju je $\sigma_1, \sigma_3 > 0$ i tada je σ_2 ekstreman napon (najmanji za slučaj da su σ_1 i σ_3 pozitivni, a najveći kada su oni negativni). U drugom slučaju je $\sigma_1, \sigma_3 < 0$ i napon σ_2 je srednji. Otuda sledi za ravansko naponsko stanje:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \pm \beta K \quad (\text{za } \sigma_1, \sigma_3 < 0) \quad (5.32.a)$$

$$\sigma_1 = \pm \beta K \quad (\text{za } \sigma_1, \sigma_3 > 0 \text{ i } |\sigma_1| > |\sigma_3|) \quad (5.32.b)$$

$$\sigma_3 = \pm \beta K \quad (\text{za } \sigma_1, \sigma_3 > 0 \text{ i } |\sigma_3| > |\sigma_1|) \quad (5.32.c)$$

Iz svega rečenog proizlazi da je prvobitno naveden uslov smičućeg napona: $\tau_{\max} = 0,5K = k$ samo približan (zbog zanemarivanja srednjeg napona). Zato je ispravnije smatrati da je najveći smičući napon u opštem slučaju

$$\tau_{\max} = \frac{1}{\sqrt{3}} K \approx 0,58 K = k$$

što odgovara relaciji

$$|\sigma_1 - \sigma_3| = \beta K$$

Oba uslova plastičnosti se, dakle, podudaraju u potpunosti kada je: a) jednoosno naponsko stanje; b) prostorno naponsko

stanje pri jednakosti dva glavna napona po veličini i znaku (puna plastičnost); c) ravansko naponsko stanje pri jednakosti oba glavna napona po veličini i znaku. To znači da je uslov maksimalnog smičućeg napona ($\tau_{max} = 0,5 K$) samo specijalan slučaj univerzalnijeg energetskog uslova plastičnosti.

Dalje, iz ovog razmatranja se može zaključiti da se plastično deformisanje, zapravo, ne može ni ostvariti ukoliko se u metalu ne jave naponi smicanja. Na primer, pri ravnomernom troosnom pritisku ili zatezanju ne postoje ni u jednoj ravni smičući naponi i zato se u tim uslovima plastično deformisanje ne može ni ostvariti. Međutim, kada je u pitanju neravnomerno troosno naprezanje, onda se smičući naponi javljaju. Oni mogu dostići i kritičan iznos, posle čega nastaje plastično deformisanje. Pri tome nema značaja da li smičući naponi nastaju kao posledica zatezanja ili pritiskivanja, jer će plastično deformisanje nastati u svakom slučaju — kad se dostigne kritičan iznos maksimalnog smičućeg napona.

Najzad, treba istaći da je uslov maksimalnog smičućeg napona zbog svog jednostavnog oblika veoma pogodan za primenu pri analitičkom iznalaženju napona, sila i dr., pa se stoga najčešće i koristi. Ta jednostavnost proizlazi iz činjenice da ova hipoteza u suštini omogućuje svođenje prostornog naponskog stanja na ravnansko, što rešavanje mnogih problema jako uprošćuje.

5.5. GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA USLOVA PLASTIČNOSTI (POVRŠINE PLASTIČNOSTI)

Poznato je da se pri zatezanju prelazak u stanje plastičnosti događa po dostizanju granice razvlačenja, ali da pri složenim naponskim stanjima može biti beskončno mnogo međusobnih kombinacija napona koje dovode do stanja plastičnosti. Zato skup svih ovih kombinacija u geometrijskom smislu obrazuje površinu $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$.

Jednačina

$$2K^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \quad (5.33.)$$

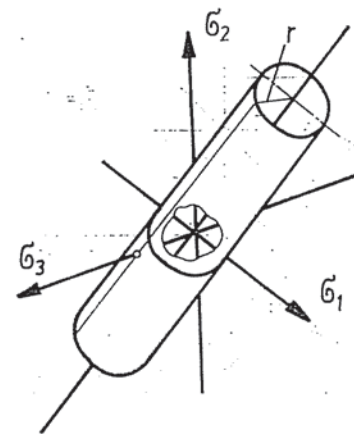
geometrijski predstavlja površinu jednog cilindra neograničene dužine, tzv. graničnu površinu plastične deformacije, ili površinu plastičnosti (sl. 49.).

Poluprečnik tog cilindra je

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}} K$$

a σ_1, σ_2 i σ_3 su tekuće koordinate.

Naime; ako su glavni naponi u nekoj tački tela u takvim iznosima i odnosima da određuju tačku koja leži na površini ovog cilindra, onda će se u njoj (tačnije u malom elementu oko nje) ostvariti plastično deformisanje. U protivnom, ako glavni normalni naponi određuju tačku koja leži u unutrašnjosti cilindra, onda će biti u pitanju stanje elastičnosti.



Sl. 49. Površina plastičnosti u vidu cilindra

Ukoliko se prednja jednačina napiše za ravnanska naponska stanja ($\sigma_1 = 0$, ili $\sigma_2 = 0$, ili $\sigma_3 = 0$) dobija se sistem jednačina:

$$\sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_2 \sigma_3 = K^2 \quad (5.34.a)$$

$$\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3 = K^2 \quad (5.34.b)$$

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = K^2 \quad (5.34.c)$$

koje geometrijski predstavljaju elipse (dobijene presekom cilindra ravnima $\sigma_1 = 0; \sigma_2 = 0$ i $\sigma_3 = 0$), čije su ose nagnute u odnosu na koordinatne ose za 45° (granična kontura plastičnosti)*. Manja

* Na primer, za $\sigma_2 = 0$ biće uslov plastičnosti

$$\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3 = K^2 = 4\tau_{max}^2$$

Ako se izvrši rotacija sistema za ugao $\pi/4$ nestaće član $\sigma_1 \sigma_3$, pa se dobija jednačina elipse

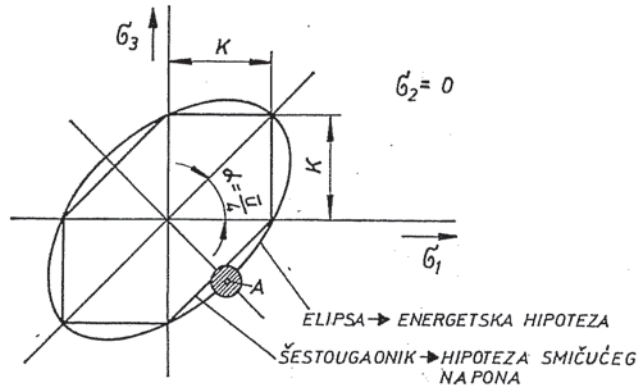
$$\frac{\sigma_1^2}{2K^2} + \frac{\sigma_3^2}{\frac{3}{2}K^2} = 1$$

(σ_1 i σ_3 su koordinate u pravcu veće i manje ose elipse).

poluosa ove elipse odgovara poluprečniku cilindra plastičnosti r (sl. 50.).

Iz odnosa na ovoj skici sledi da u slučaju ravanskog naponskog stanja u oblasti plastičnosti ne može ni jedan glavni napon biti veći od

$$2/\sqrt{3} K = 1,155 K$$



Sl. 50. Granična kontura plastičnosti

Može se, međutim, početi od uslova smičućih napona i napisati da je pri najrazličitijim kombinacijama napona:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq K^* \quad (5.35.a)$$

$$|\sigma_2 - \sigma_3| \leq K^* \quad (5.35.b)$$

$$|\sigma_3 - \sigma_1| = K \quad (5.35.c)$$

Ove jednačine, ako se povežu znakom jednakosti, predstavljaju površine koje obrazuju pravilnu šestougaonu prizmu čije su ivice podjednako nagnute u odnosu na glavne ose (površina plastičnosti) — sl. 51.

Dužina jedne strane šestougaonika koji se dobija presekom prizme upravno na njenu osu biće

$$\sqrt{\frac{2}{3}} K$$

*) Znak nejednakosti proizlazi iz: $\tau_{12} + \tau_{23} + \tau_{31} = 0$, jer ne mogu sva tri glavna smičuća napona biti jednaka jednoj istoj veličini različitoj od nule. Međutim, za prelazak u stanje plastičnosti dovoljno je da u ma kojoj od ovih jednačina bude znak jednakosti, što znači da je jedan od smičućih napona dostigao iznos $0,5K$.

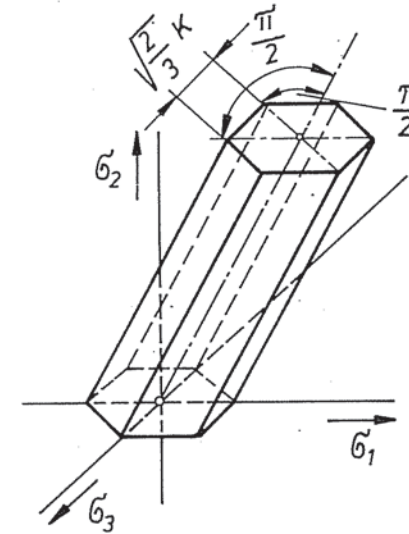
Ukoliko je u pitanju ravansko naponsko stanje (na primer, $\sigma_2 = 0$) prizma će preći u šestougaonik prema sl. 52. Jednačine pravih koje obrazuju konturu ovog šestougaonika dobijaju se iz prednjih jednačina kada se stavi

$$\sigma_2 = 0$$

$$|\sigma_1 - \sigma_3| = K \quad \text{za } \sigma_1 \sigma_3 \leq 0 \text{ i } |\sigma_1| > |\sigma_3|$$

$$|\sigma_1| = K \quad \text{za } \sigma_1 \sigma_3 \geq 0 \text{ i } |\sigma_1| > |\sigma_3|$$

$$|\sigma_3| = K \quad \text{za } \sigma_1 \sigma_3 \geq 0 \text{ i } |\sigma_1| < |\sigma_3|$$



Sl. 51. Površina plastičnosti u vidu šestougaone prizme

Ako je deformaciono stanje ravansko biće

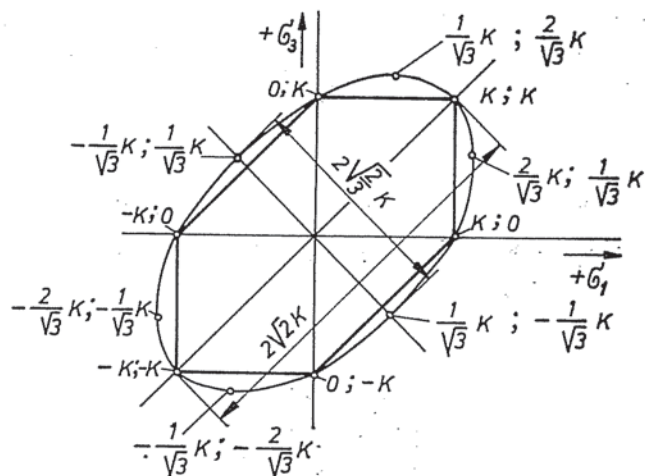
$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

pa je uslov plastičnosti

$$|\sigma_1 - \sigma_3| = K$$

dok se dve ostale jednačine povezuju znakom nejednakosti.

Iz navedenog proizlazi da se za slučaj ravanskog naponskog stanja oba uslova plastičnosti mogu predstaviti geometrijski u ravni.



Sl. 52. Granična kontura (šestougaonik) plastičnosti za slučaj ravanskog naponskog stanja

Ako se prikazani cilindar (sl. 49.) uporedi sa šestougaonom prizmom (sl. 51.), a elipsa sa šestougaonikom, onda se može zaključiti da je cilindar opisan oko prizme, a odgovarajuća elipsa oko šestougaonika (sl. 52.), jer i cilindar i prizma imaju isti ugao nagiba prema koordinatnim osama (kosinus pravca $1/\sqrt{3}$).

Na osnovu (sl. 52.) dalje proizlazi da postoji ukupno šest naponskih stanja za koje se oba uslova plastičnosti podudaraju:

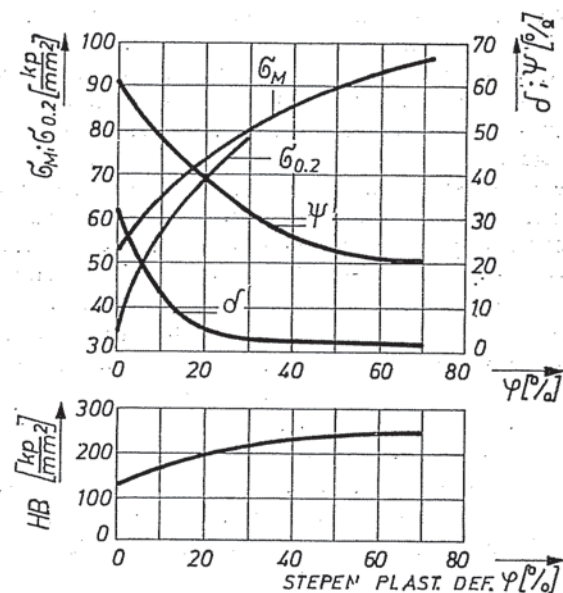
- 1) $\sigma_1 = 2\tau_{\max} = K$; $(\sigma_2 = \sigma_3 = 0)$
- 2) $\sigma_1 = -2\tau_{\max} = -K$; $(\sigma_2 = \sigma_3 = 0)$
- 3) $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$; $(\sigma_3 = +2\tau_{\max} = +K)$
- 4) $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$; $(\sigma_3 = -2\tau_{\max} = -K)$
- 5) $\sigma_1 = \sigma_3 = 2\tau_{\max} = K$; $(\sigma_2 = 0)$
- 6) $\sigma_1 = \sigma_3 = -2\tau_{\max} = -K$; $(\sigma_2 = 0)$

dok je pri svim ostalim naponskim stanjima veći napon tečenja po energetskom uslovu. Najveća razlika, odnosno nepoklapanje konture elipse i šestougaonika, dobija se na mestima koja su oko tačke A na sl. 50. Ona odgovara slučaju $\sigma_1 = -\sigma_3$ i $\sigma_2 = 0$. Može se lako pokazati da ova razlika odgovara ranije navedenom iznosu od 15%.

5.6. DEFORMACIONO OČVRŠĆAVANJE DEFORMACIONA ČVRSTOĆA U FUNKCIJI ČINILACA.

5.6.1. Osnovni pojmovi

Deformisanje metala u hladnom stanju dovodi do smanjenja vrednosti onih mehaničkih karakteristika koje predstavljaju njegove otpornosti prema toj deformaciji (vlačenja, čvrstoća i tvrdoća). Istovremeno dolazi do smanjenja vrednosti pokazatelja plastičnosti (karakteristike izduženja, suženja i žilavosti). Plastičnost se pri dovoljno velikom stepenu deformacije može toliko smanjiti da dalje deformisanje postane nemoguće. Na sl. 53. grafički je prikazana promena nekih mehaničkih karakteristika materijala u zavisnosti od stepena izvršene deformacije (pri tome je izuzetno ovaj stepen obeležen oznakom γ , iako je izražen u procentima).



Sl. 53. Promena mehaničkih svojstava ugljeničnog čelika sa 0,27% C u zavisnosti od veličine prethodno ostvarene plastične deformacije [6]

Inače, deformisanje metala je praćeno, takođe, povećanjem broja dislokacija i drugim promenama fizičko-hemijske prirode.

Čitava pojava ovog niza istovremenih promena svojstava metala, izazvanih njegovim deformisanjem u hladnom stanju, poznata je kao hladno deformaciono očvršćavanje (ili ojačavanje).

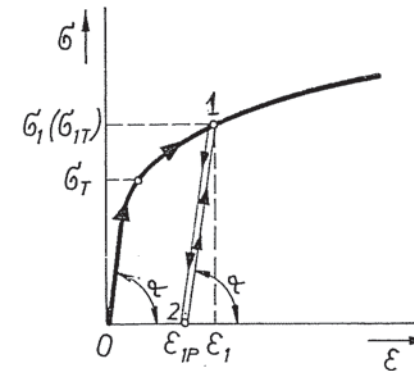
Prema tome, sa porastom stepena deformacije u hladnom stanju raste i otpor prema njoj. Uz pretpostavku da se deformisanje obavlja bez učešća trenja, taj otpor se naziva deformaciona čvrstoća, kako je to napred već istaknuto. Takođe je pokazano da on nije ništa drugo do uslovna kritična vrednost uopštenog napona σ_e , odnosno napon tečenja u posmatranom trenutku pri njegovom jednoosnom naprezanju (može se zamisliti i kao granica tečenja materijala koji je ojačao usled prethodnog deformisanja). Njegova suština se može najjednostavnije objasniti upravo na slučaju jednoosnog zatežućeg naprezanja.

Na sl. 54. pokazana je kriva stvarnih napona (σ) materijala pri linearnom istezanju u zavisnosti od izduženja ϵ . Može se pretpostaviti da je deo (na primer, epruveta) najpre napregnut naponom σ_1 , pri čemu je ukupno izdužen za iznos ϵ_1 . Treba uočiti da je pri tome plastično deformisanje počelo kada je postignut iznos normalnog napona jednak granici razvlačenja nedeformisanog materijala (σ_T). Ako se zatim deo rastereti, onda će usled iščezavanja elastičnih deformacija njegova dužina da se unekoliko smanji (rasterećenje se vrši po liniji 1—2), tj. ostaće trajno plastično izduženje u iznosu ϵ_{IP} . Ukoliko se zatim zatezanje ponovi, deo će se samo elastično deformisati sve dok napon ne dostigne vrednost σ_1 , posle čega je tek moguće plastično deformisanje. To znači da je, zahvaljujući hladnom očvršćavanju, prvobitna granica razvlačenja σ_T promenila veličinu, tj. da je nova granica razvlačenja (ili, tačnije, napon tečenja): $\sigma_{T1} = \sigma_1 > \sigma_T$. Treba imati u vidu da se pri ovome radi o stvarnim naponima, a ne o tehničkim (uslovnim). Otuda se deformaciona čvrstoća K može shvatiti i kao stvarni napon pri jednoosnom ravnomernom istezanju, tj. kao trenutni napon tečenja (deformaciono očvršćavanje zapravo i jeste porast napona tečenja). Ovaj napon se dobija deljenjem sile zatezanja sa stvarnom trenutnom veličinom poprečnog preseka epruvete. On se takođe može izraziti i preko tehničkog napona (σ_t) korišćenjem poznatih relacija zasnovanih na nepromenljivosti zapremine metala pri plastičnom deformisanju, tj.

$$\begin{aligned} \sigma &= K = \frac{F}{A} = \frac{Fl}{A_0 l_0} = \frac{F(l_0 + \Delta l)}{A_0 l_0} = \frac{F}{A_0} e^\varphi = \sigma_t e^\varphi = \\ &= \frac{F}{A_0(1-\psi)} = \frac{\sigma_t}{1-\psi} = \sigma_t(1+\epsilon) \end{aligned} \quad (5.36.)$$

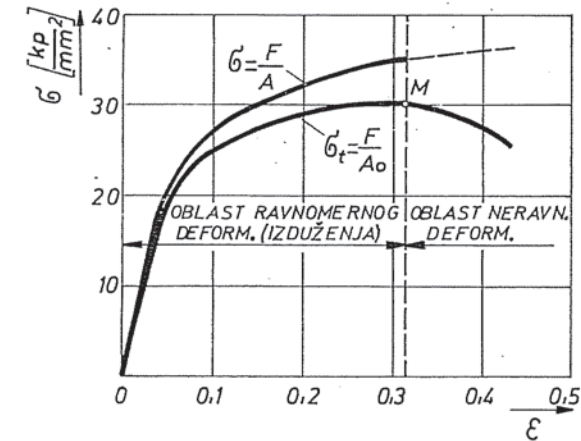
gde je: σ — stvarni zatežujući napon, F — sila zatezanja, A — stvarni poprečni presek epruvete u posmatranom trenutku, σ_t — tehnički (uslovni) napon ($\sigma_t = F/A_0$), ψ — kontrakcija (suzenje) poprečnog preseka, ϵ — relativno izduženje epruvete, e — osnova prirodnog logaritma, a stepen deformacije

$$\varphi = \ln \frac{l}{l_0} = \ln \frac{A_0}{A}$$



Sl. 54. Promena granice razvlačenja usled izvršenog plastičnog deformisanja

Odnosi između krivih napona — deformacija za slučaj tehničkog i stvarnog napona ilustrativno su prikazani na sl. 55.



Sl. 55. Krive stvarnih i tehničkih napona

Polazna deformaciona čvrstoća, odnosno granica razvlačenja, treba da je što manja sa stanovišta obrade (manje potrebne deformacione sile, manje habanje alata, itd). Ako je ona suviše visoka, odustaje se od obrade deformisanjem u hladnom stanju i prelazi se na toplu obradu.

Pojava deformacionog očvršćavanja često je veoma povoljna, jer se putem obrade deformisanjem u hladnom stanju ne postiže samo željeni oblik dela, već se istovremeno povećava i njegova čvrstoća.

Pri izvođenju različitih operacija obrade metala deformisanjem intenzitet deformacionog očvršćavanja u pojedinim zonama tela je različit u opštem slučaju, tj. različita je i deformaciona čvrstoća. Postavljanje i rešavanje jednačina ravnoteže i drugih potrebnih jednačina u takvim uslovima uopšte je veoma problematično, kako je to ranije već istaknuto. Naime, naponi svakako zavise od veličine ostvarenih deformacija, ali su istovremeno i funkcija koordinata posmatranog elementa, s obzirom na nejednorodnost (nehomogenost) deformisanja u opštem slučaju. Ipak, korišćenjem različitih postupaka za približno rešavanje, uz veća ili manja uprošćenja, može se u nizu slučajeva uticaj očvršćavanja na polje napona izraziti uprošćeno i tako dobiti praktično zadovoljavajući rezultati. Najčešće se pri tome vrši pogodno osrednjavanje, tj. zanemarivanje promene deformacione čvrstoće u pojedinim većim zonama, pa i čitavom telu koje se deformiše.

5. 6. 2. Krive tečenja (očvršćavanja) i njihovo iznalaženje

Ako se grafički predstavi funkcionalna zavisnost deformacione čvrstoće od veličine odgovarajuće deformacije, dobija se kriva očvršćavanja (ili kriva tečenja, odnosno kriva deformacionih čvrstoća). Poznavanje ovih krivih za pojedine materijale ima veliki praktičan značaj, jer je, na primer, za izračunavanje potrebne deformacione sile i rada neophodno poznavati iznos deformacione čvrstoće.

S obzirom da se radi o području plastičnosti, uopšteni napon σ_e mora biti jednak deformacionoj čvrstoći K u svakom trenutku procesa (jer to znači ispunjenje uslova plastičnosti), pa se zato u najopštijem slučaju kriva očvršćavanja može shvatiti kao grafička zavisnost između uopštenog napona i uopštene deformacije (uopštena kriva očvršćavanja). Međutim, iznalaženje krivih sa ovim koordinatama može biti skopčano sa relativnim teškoćama u vezi sa eksperimentalnim određivanjem pojedinih glavnih deformacija u opštem slučaju. Zato se obično krive očvršćavanja predstavljaju na jednostavniji način, u sistemu deformaciona čvrstoća (stvarni na-

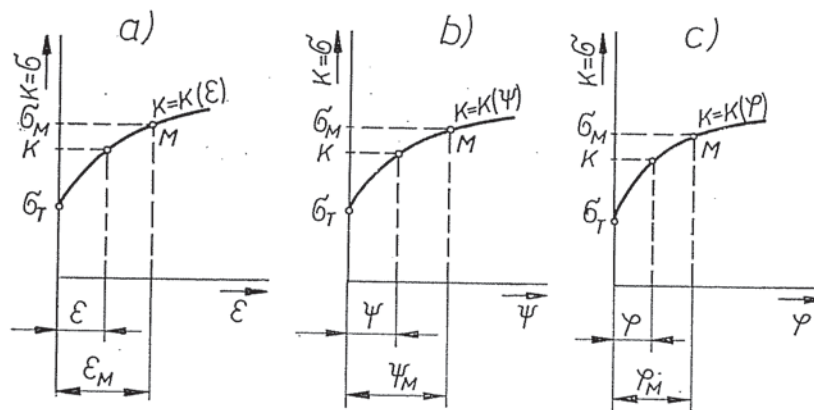
pon) — maksimalna linijska deformacija, a dobijaju se opitnim putem primenom jednoosnog naprezanja (zatezanje ili pritisak). Ovakav postupak ima svoj osnovni smisao i opravdanje u činjenici da je kritična vrednost uopštenog napona, pri kojoj dolazi do prelaska u stanje plastičnosti, određena veličina koja ne zavisi od naponskog stanja, kao i da je pri homogenom istezanju (ili sabijanju) izotropnog materijala uopštena deformacija brojčano jednaka najvećoj glavnoj deformaciji. Tako dobijena kriva onda važi, kako za uslove jednoosnog naprezanja, tako i za sve druge.

Pri ovome je značajno napomenuti da se očvršćavanje ne može određivati uvek na osnovu deformacije izračunate prema početnim i konačnim dimenzijama opitnog tela, već je potrebno da se uzme u obzir i eventualno prethodno deformisanje («istorija deformacije»). Zato je, šire posmatrano, pouzdanije da se ono ipak određuje na osnovu uopštene deformacije. Na primer, ako se jedan štap istegne za iznos maksimalne glavne deformacije ϵ_1 , a zatim skratit (sabije) za isti iznos, rezultujuća deformacija biće jednaka nuli, što očigledno u smislu očvršćavanja ne znači da deformisanja nije ni bilo. To jasno pokazuje uopštena deformacija koja će u ovom slučaju imati iznos

$$\epsilon_c = 2 |\epsilon_1|$$

i na osnovu nje se iz krive očvršćavanja može naći stvarna deformaciona čvrstoća na kraju procesa.

Razlikuju se krive očvršćavanja: prvog, drugog i trećeg reda (sl. 56.).



Sl. 56. Krive očvršćavanja: a) prvog—, b) drugog—, c) trećeg reda

U prvom slučaju je deformaciona čvrstoća (K) funkcija relativne deformacije (ϵ), u drugom suženja, odnosno kontrakcije, poprečnog preseka (ψ), a u trećem stvarne — logaritamske deformacije (φ). Jasno je da se iz jedne od ovih krivih mogu dobiti ostale dve, s obzirom da između pojedinih deformacionih karakteristika postoje potpuno određene zavisnosti.

Koja će se kriva koristiti zavisi, prvenstveno, od vrste maksimalne deformacije. Ako ona predstavlja izduženje, pogodnije je koristiti krive prvog ili trećeg reda, dok se pri sabijanju deformacija često izražava i preko kontrakcije. Ipak, najčešće se krive očvršćavanja prikazuju u sistemu $K - \varphi$, tj. $K = K(\varphi)$.

Za dobijanje krivih tečenja mogu se koristiti različiti postupci. Međutim, od najvećeg praktičnog interesa su oni koji se mogu primeniti korišćenjem standardne laboratorijske opreme i zato će ovde uglavnom o njima biti reč. To su, pre svega, postupci zasnovani na jednoosnom zatezanju ili sabijanju.

Iako eksperimentalno određivanje krive očvršćavanja putem zatezanja epruvete izgleda najjednostavnije (pogodno merenje, odsustvo trenja i sl.), njegove mogućnosti su, ipak, ograničene. Naime, prikazana jednakost deformacione čvrstoće i stvarnog zatežućeg napona važi samo u oblasti ravnomernog (homogenog) izduženja — do početka lokalizovanog deformisanja. Ono je najčešće relativno malo i na primer kod mnogih čelika iznosi samo $\eta_M \approx 0,2 - 0,3$. Posle toga, naponsko stanje se menja i od jednoosnog prelazi u prostorno, tako da je za iznalaženje deformacione čvrstoće i u toj oblasti, sve do razaranja, pogodnije vršiti ispitivanje pritiskivanjem. Međutim, tada dolazi do teškoća druge vrste, jer se uticaj trenja na čeonim površinama opitnog tela ne može u potpunosti izbexi, već samo smanjiti preduzimanjem različitih mera, kao što je podmazivanje i dr.

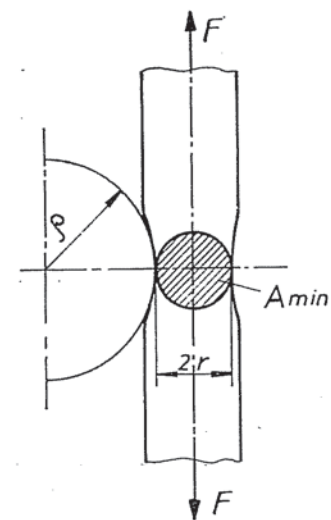
Da bi se tok krive dobijene opitom zatezanjem i u oblasti neravnomernog deformisanja ipak nekako odredio, koriste se različite empirijske preporuke. Na primer, prema Siebel-u i Schwaigerer-u [14] napon tečenja u oblasti lokalizovanog deformisanja može se, pri ispitivanju pomoću epruveta sa kružnim poprečnim presekom, izračunati po sledećem obrascu

$$K = \frac{F}{A_{\min} \left(1 + \frac{r}{4\rho}\right)} \quad (5.37.)$$

a odgovarajuća uopštena deformacija je

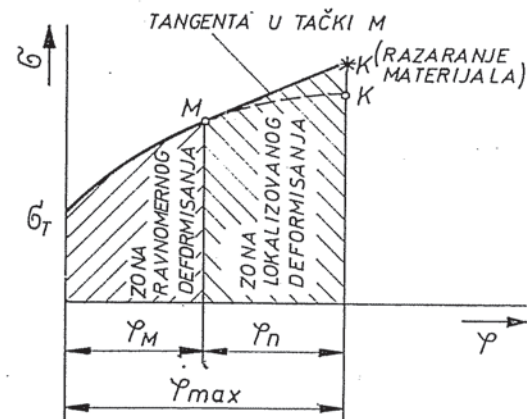
$$\varphi_c = \ln \frac{A_0}{A_{\min}}$$

Oznake u ovim obrascima odgovaraju oznakama na sl. 57.



Sl. 57. Zona lokalizovanog deformisanja na cilindričnoj epruveti

Pri ovome se može računati i sa greškama koje nastaju, kako u vezi sa određivanjem poluprečnika (što praktično stvara najveće probleme), tako i zbog zanemarivanja uticaja brzine deforma-



Sl. 58. Aproksimacija krive očvršćavanja u oblasti neravnomernog deformisanja

cije (ova brzina u zoni lokalizovanog deformisanja, pri konstantnoj brzini mašine, znatno poraste u odnosu na zonu ravnomernog deformisanja).

Međutim, sve ovo se često još pojednostavljuje na taj način što se celokupna kriva očvršćavanja ipak dobija ispitivanjem zatezanjem, s tim da se u oblasti neravnornog deformisanja izvrši aproksimacija pravom linijom, koja krivu u oblasti ravnomernog izduženja tangira u tački u kojoj počinje lokalizovanje deformisanja (sl. 58).

Pri iznalaženju krive tečenja pomoću opita pritiskivanjem može se takođe postupiti na različite načine.

Jedan od njih je da se izvrši određena ekstrapolacija vrednosti radi eliminisanja uticaja trenja. Ovaj postupak su preporučili različiti autori (M. Cooke, E.C. Larke, L. A. Šofman, ...) a sastoji se u sledećem.

Od ispitivanog metala izradi se nekoliko cilindričnih epruveta prečnika d_0 i visine h_0 . One se zatim sabijaju i tako dobije dijagram napon-deformacija, pri čemu je deformacija izražena kao

$$\varepsilon = \frac{h_0 - h}{h_0}$$

gde je h — visina epruvete u posmatranom trenutku.

Ako se, posle toga, isti opit izvrši više puta i to sa serijama epruveta drugih prečnika, dobiće se za svaku od serija različite krive $p - \varepsilon$, jer sa povećanjem prečnika raste i trenje na čeonim površinama, a time i potrebna deformaciona sila (sl. 59).

Specifični pritisak (ili radni pritisak — v. poglavlje 11.2.1) biće

$$p = \frac{F}{A} = \frac{Fh}{A_0 h_0} = \frac{F}{A_0 (1 - \varepsilon)} \quad (5.38.)$$

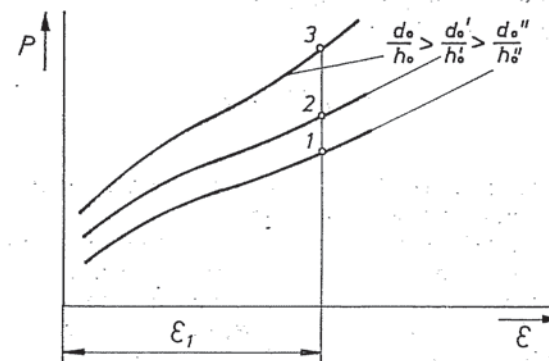
a trenutni odnos prečnika i visine d_0/h_0

$$\frac{d}{h} = \frac{d_0}{h_0(1 - \varepsilon)\sqrt{1 - \varepsilon}} = \frac{d_0}{h_0} \frac{1}{\sqrt{(1 - \varepsilon)^3}} \quad (5.39.)$$

pri čemu je

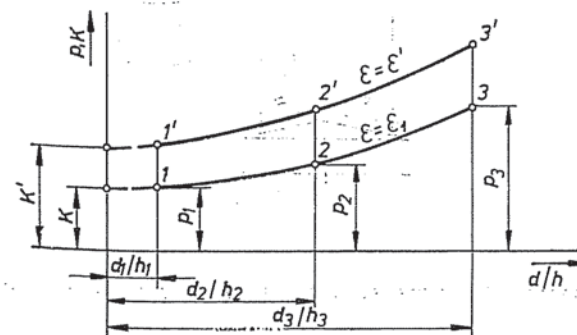
$$d = d_0 \sqrt[3]{\frac{h_0}{h}}$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{h}{h_0}$$



Sl. 59. Dijagrami napona (specifičnih pritisaka) pri sabijanju epruveta sa različitim odnosima d_0/h_0

Ovako dobijeni dijagrami napona uključuju i deformacionu čvrstoću materijala i uticaj spoljašnjeg trenja. Da bi se ovaj uticaj eliminisao, konstruiše se jedan drugi dijagram (sl. 60.). Na osnovu tačaka 1, 2 i 3 na sl. 59. koje odgovaraju nekoj određenoj deformaciji ε_1 , dobijaju se tačke 1', 2' i 3' na sl. 60. One određuju krivu $p = f(d/h)$. Ovo se može ponoviti više puta za različite iznose deformacija (ε') i tako dobiti veći broj krivih. Zapaža se da one ne polaze od ordinate, već od položaja koji odgovara vrednosti apscise $(d/h)_{min}$. Ako se, međutim, krive ekstrapoliraju do preseka sa ordinatnom osom, dobiće se za odgovarajuće deformacije ordinate tražene deformacione čvrstoće K , jer se može smatrati da za fiktivan slučaj $d = 0$ nema trenja, odnosno njegovog uticaja (a deformaciona čvrstoća, po definiciji, ne uključuje trenje).



Sl. 60. Dijagram napona pri sabijanju u zavisnosti od odnosa d/h

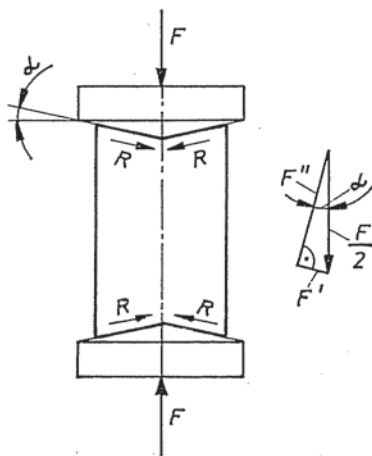
Na osnovu eksperimentalnih rezultata ustanovljeno je [76] da pri optima treba zadržati odnos

$$1,5 \leq \frac{d_0}{h_0} \leq 4$$

jer bi u protivnom praktično došlo do znatnog poremećaja naponsko-deformacionog stanja, s obzirom na nepravilno deformisanje cilindričnog omotača i neravnomernost normalnih napona. Osim toga, pri ovakvom ispitivanju se preporučuje primena epruveta sa nešto hrapavijim čeonim površinama, jer je u tom slučaju zavisnost položaja knive $p-s$ od odnosa d_0/h_0 više izražena, što je povoljnije za dalje iznalaženje krive očvršćavanja.

Na ovom mestu se neće ulaziti u detaljnija opisivanja većeg broja drugih postupaka koji se takođe mogu koristiti za određivanje krivih tečenja, niti u njihovo iscrpno nabrojanje, već će se samo pomenuti neki od njih i navesti njihove osnovne specifičnosti.

Na primer, postupak prema E. Siebel-u i A. Pomp-u sastoji se u tome što se cilindrična epruveta izrađuje sa konusno udubljenim čelom, a čelo pritiskivača takođe u vidu konusa. Ugao ovog konusa je obično $3^\circ - 7^\circ$ i podešava se tako da se stvori radijalna komponenta sile (usmerena od centra ka periferiji) u iznosu koji treba da komepnzira silu trenja (sl. 61.).



Sl. 61. Sabijanje cilindrične epruvete sa konusnim čeonim površinama

Ako je sila trenja R , a F' komponenta deformacione sile u istom pravcu, onda mora biti zadovoljen uslov: $R = F'$.

Dalje je: $R = \mu F''$ i

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F'}{F''}$$

Pa se dobija

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \mu \quad (5.40.)$$

Time je uticaj trenja eliminisan, pa se ostvaruje jednoosno naponsko stanje u cilindru zbog čega će biti

$$K = \frac{F}{A}$$

a logaritamska deformacija

$$\varphi = \ln \frac{A}{A_0}$$

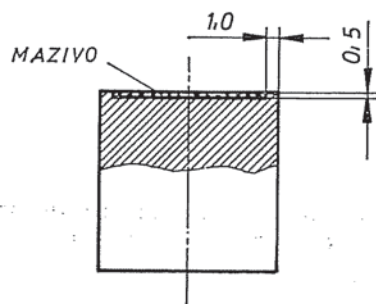
Međutim, praktično uvek postoji izvesno odstupanje od homogenog deformisanja (po preseku i visini epruvete ne ostvaruje se praktično sasvim isti stepeni deformacije). U tom smislu, opiti su pokazali da se cilindrični oblik epruvete zadržava do stepena deformacije oko $\varphi \approx 0,45$. Zato se u toku opita i ne radi neposredno sa većom deformacijom, već se epruveta ponovo obrađuje, s tim što se zadržava isti odnos prečnika i visine, pa tek onda deformisanje nastavlja. Na ovaj način se može postići stepen deformacije do oko $\varphi \approx 1,2$.

Po jednom postupku, koji se zasniva na sabijanju cilindrične epruvete, u cilju što većeg smanjenja uticaja trenja, na čeonim površinama epruveta izrađuju se spiralni kanali u kojima treba da se zadrži mazivo.

Po drugom sličnom postupku, međutim, ovo trenje se praktično eliminiše na taj način što se čelo epruvete udubi u vidu šolje (sl. 62.) i to udubljenje ispunjava mazivom, tako da je za vreme sabijanja dodir između pritiskivača i epruvete ostvaren uglavnom preko ovog maziva (samo na malom delu koji se odnosi na zidove »šolje« dodir je neposredan).

Za iznalaženje krivih tečenja za tanke limove može se, pored ostalog, primeniti hidraulični postupak. S obzirom da se pri tome

ostvaruje dvoosno razvlačenje, nije moguće da se uzme u obzir eventualna anizotropija svojstava, kao što je to slučaj pri ispitivanju zatezanjem.



Sl. 62. Udubljena čeona površina epruvete ispunjena mazivom

Za upoznavanje sa ostalim postupcima (ispitivanje tankih limova sabijanjem pomoću konusa, ispitivanje torzijom, savijanjem, ...) zainteresovani se upućuju na specijalnu literaturu [14, 18, ...].

Treba primetiti da se praktično za neki određeni materijal često dobijaju krive tečenja koje se manje-više međusobno razlikuju. Osnovni razlozi nastajanja tih razlika su: (ne) tačnost merenja, praktično odsustvo uslova i pretpostavki na kojima se zasniva postupak, različiti nepredviđeni uticaji i anizotropija, uticaji trenja, različiti temperaturni uticaji i sl. Ovome treba dodati i razlike koje eventualno mogu proisteci iz metodoloških specifičnosti pojedinih postupaka. Ipak, u većini slučajeva one su relativno male, pa se bez veće greške mogu zanemariti, tj. praktično se smatra da je kriva tečenja nekog materijala jedinstvena, bez obzira na to da li je dobijena opitom zatezanjem, pritiskivanjem, ili na neki drugi način.

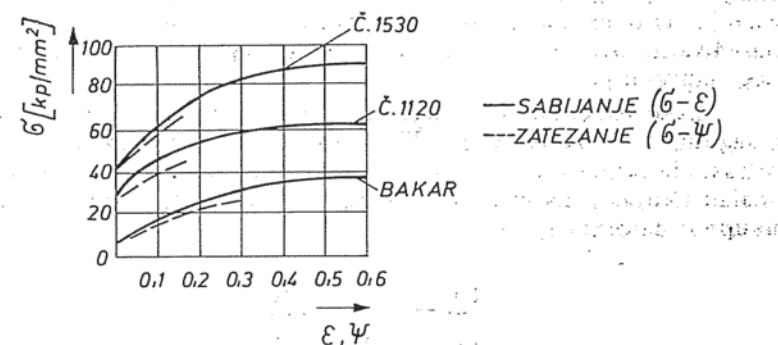
Jedan primer u tom smislu dat je u tabeli 2. i na sl. 63. [76].

Napomena: Oznake za čelike korišćene u ovoj tabeli samo približno odgovaraju originalnim oznakama prema standardu GOST.

Karakteristično je za sve krive tečenja da u početku (pri malim deformacijama) pokazuju intenzivniji porast, dok veće deformacije izazivaju manje poraste stvarnog napona ($dK/d\epsilon$) opada sa porastom stepena deformacije). Inače, po pravilu, sve krive tečenja koje se odnose na deformisanje u hladnom stanju, monotonno rastu sa porastom stepena deformacije.

Tabela 2.

Materijal	$\sigma' (K')$ [kp/mm ²] pri sabijanju	$\sigma'' (K'')$ [kp/mm ²] pri zatezanju	$\frac{\sigma'}{\sigma''}$
Č. 1120	52	44,5	1,19
Č. 1330	59	51	1,16
Č. 1530	74	67	1,10
bakar	30	28,6	1,05
mesing sa 41% Zn	62	53,5	1,15



Sl. 63. Dijagrami deformacionog očvršćavanja dobijeni sabijanjem i zatezanjem

S obzirom da ne postoji prirodna analitička veza između deformacione čvrstoće i deformacije, ove krive se mogu dobiti isključivo eksperimentalno. Da bi se mogla iznaći različita rešenja u analitičkom vidu, potrebno je izvršiti aproksimaciju stvarne krive nekom funkcionalnom zavisnošću. Ona treba da obezbedi zadovoljavajuću podudarnost i da bude predstavljena, po mogućstvu, što jednostavnijim izrazom. U tom smislu ima više preporuka, odnosno mogućnosti.

5.6.2.1. Empirijske jednačine (analitička aproksimacija) krivih očvršćavanja

U analitičkom obliku uopštena kriva očvršćavanja može se predstaviti kao

$$\sigma_e = f(\varphi) \quad (5.41.)$$

gde je: σ_e — uopštenj napon tečenja materijala u posmatranom trenutku procesa; φ — deformacija, koja je za slučaj monotonog procesa jednaka uopštenom stepenu ukupne deformacije (φ), a za slučaj nemotonog procesa aritmetičkom zbiru stepena deformacija uzastopnih etapa, u okviru kojih se deformisanje može (bar približno) smatrati monotonim.

Ako je proces monoton, biće u opštem slučaju

$$\sigma_e = f(\varphi_e) \quad (5.42.)$$

što znači da ova zavisnost nije vezana za naponsko-deformaciono stanje, zbog čega se i govori o uopštenoj krivoj očvršćavanja. Iz te okolnosti takođe proizlazi i ideja o eksperimentalnom određivanju ove krive na najjednostavniji način — putem jednoosnog naprežanja.

Eksperimentalno je višestruko potvrđeno da je, naročito za nelegirane i niskolegirane čelike, opravdano pretpostaviti da je prirast deformacione čvrstoće sa porastom deformacije proporcionalan ukupnoj deformacionoj čvrstoći, a obrnuto proporcionalan ukupnoj deformaciji:*)

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = n \frac{\sigma}{\varphi} = n \frac{K}{\varphi}$$

$$\sigma = K = C \varphi^n \quad (5.43.)$$

gde su C i n konstante čije vrednosti zavise od vrste materijala (n se obično naziva eksponent deformacionog očvršćavanja materijala). Lako je zaključiti da konstanta C karakteriše položaj krive u dijagramu, a n stepen očvršćavanja.

Dakle, primenom ovog izraza dobija se veoma često zadovoljavajuća aproksimacija krive očvršćavanja.

Kako ovakva funkcionalna zavisnost u osnovi važi za uopštene napone i deformacije, tj.

$$\sigma_e = C \varphi_e^n \quad (5.44.)$$

*) Ovakva zavisnost se ipak ne može sa zadovoljavajućom tačnošću koristiti za materijale kao što su: visokolegirani čelici, bakar i dr. Osim toga, ona pretpostavlja da materijal nije bio prethodno deformisan u hladnom stanju, odn. ojačan. Inače, ovakva aproksimacija krive tečenja bila je predložena od strane Ludwik-a još 1909 god.

to će ona važiti i za jednoosno naprežanje, kao specijalan slučaj ovog opšteg odnosa, s tim što se pri tome umesto uopštene deformacije φ može koristiti maksimalna glavna deformacija φ_M , kako je to napred već konstatovano.

Konstanta C se može odrediti primenom ovog odnosa na moment početka lokalizovanja deformisanja, što pri ispitivanju zatezanjem odgovara postizanju zatezne čvrstoće σ_{tM} (tehnički napon), odnosno deformacione čvrstoće σ_M (stvarni napon) i stvarnog izduženja φ_M

$$C = \frac{\sigma_M}{\varphi_M^n} = \frac{K_M}{\varphi_M^n} = \frac{\sigma}{\varphi^n} = \frac{K}{\varphi^n}$$

(K_M — deformaciona čvrstoća u trenutku kada počinje lokalizacija deformisanja).

Iz ovog odnosa proizlazi

$$\sigma_M = \sigma \left(\frac{\varphi}{\varphi_M} \right)^n \quad (5.45.)$$

Dalje se, s obzirom na dimenzije epruvete, može sila zatezanja izraziti kao

$$F = \sigma A = A C \varphi^n = A_0 \frac{l_0}{l} C \left(\ln \frac{l}{l_0} \right)^n \quad (5.46.)$$

Ako najvećem ravnomernom izduženju odgovara dostizanje maksimalne sile onda će u tom momentu (tačka M na dijagramu $\sigma - \varepsilon$ — sl. 55.) biti:

$$dF_M = \sigma_M dA_M + A_M d\sigma_M = 0$$

$$\frac{d\sigma_M}{\sigma_M} = - \frac{dA_M}{A} \quad *)$$

a iz

$$V = A_0 l_0 = A l = \text{const.}$$

*) Ovakvo ispisivanje indeksa M treba ovde shvatiti samo uslovno. Na-

ime, korektnije bi bilo pisati $\left(\frac{d\sigma}{\sigma} \right)_M = - \left(\frac{dA}{A} \right)_M$ itd., ali ako se na pri-

mer $d\varphi_M$ shvati kao $d\varphi$ oko tačke M , a ne kao diferencijal deformacije φ_M onda se ipak može zadržati ispisivanje u ovoj formi.

$$Adl + l dA = 0$$

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dl}{l}$$

što znači da je u tački početka lokalizovanja deformisanja (tj. dostizanja maksimuma sile):

$$\frac{d\sigma_M}{\sigma_M} = \frac{dl_M}{l_M} = d\varphi_M$$

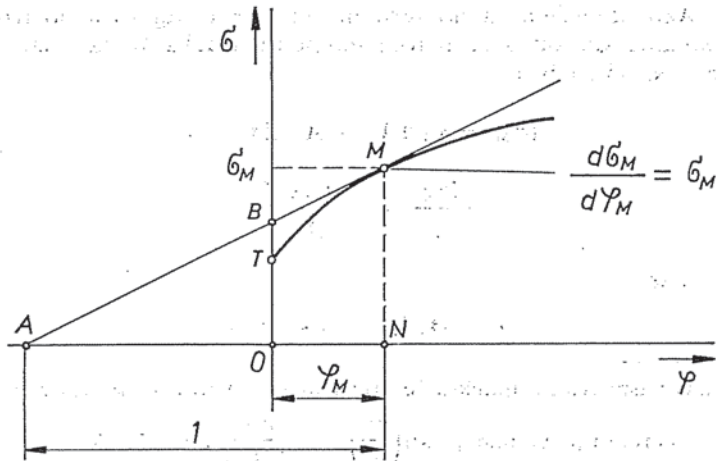
$$\frac{d\sigma_M}{d\varphi_M} = \sigma_M \quad (5.47.)$$

Prema tome, stvarni napon u ovom kritičnom momentu jednak je tangensu ugla nagiba tangente povučene na krivu $\sigma - \varphi$ u tački M (koja na apscisi odseca subtangentu veličine 1) — sl. 64.

Kada se u prednji odnos uvede aproksimativna jednačina (5.43.) dobija se

$$\frac{d\sigma_M}{d\varphi_M} = nC\varphi_M^{n-1} = C\varphi_M^n$$

$$n = \varphi_M = \ln \frac{l_M}{l_0} \quad (5.48.)$$



Sl. 64. Kriva $\sigma - \varphi$ sa tangentom povučenom u tački koja odgovara postizanju maksimalne sile zatezanja

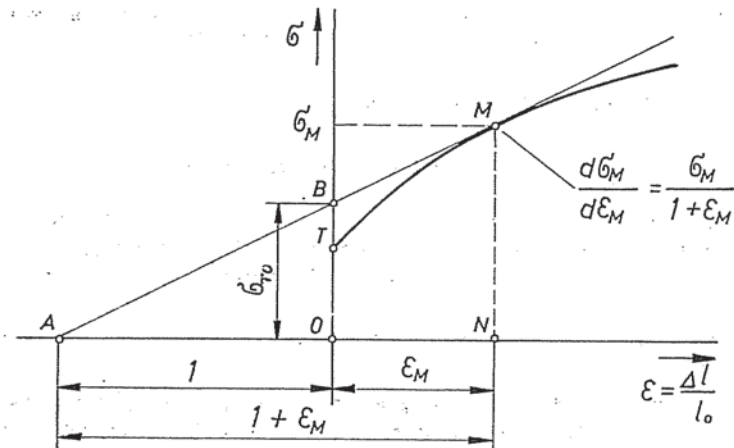
Napomena: isti odnos može se prikazati i preko relativne deformacije ε , s tim što će u tom slučaju subtangenta (sl. 65.) biti $1 + \varepsilon_M$, jer je

$$\frac{d\sigma_M}{d\varepsilon_M} = \frac{\sigma_M}{1 + \varepsilon_M} \quad (5.49.)$$

Može se lako dokazati da ova tangenta istovremeno na ordinati odseca dužinu jednaku zateznoj čvrstoći materijala σ_{IM} . Naime, iz sličnosti formiranog trougla ABO levo od ordinate i velikog trougla AMN — do položaja koji odgovara tački M , proizlazi

$$\frac{BO}{\sigma_M} = \frac{1}{1 + \varepsilon_M}$$

$$BO = \frac{\sigma_M}{1 + \varepsilon_M} = \sigma_{IM}$$

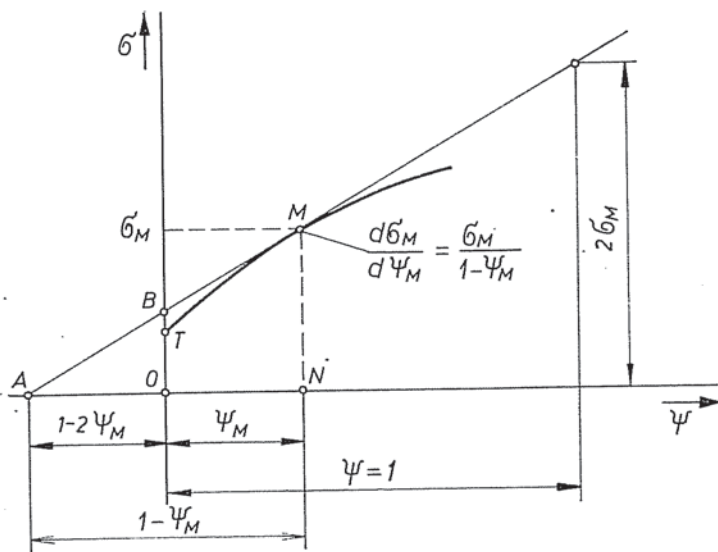


Sl. 65. Kriva $\sigma - \varepsilon$ sa tangentom povučenom u tački koja odgovara postizanju maksimalne sile zatezanja

Najzad, za slučaj korišćenja deformacije drugog reda biće

$$\frac{d\sigma_M}{d\psi_M} = \frac{\sigma_M}{1 - \psi_M}$$

tj. subtangenta je $1 - \psi_M$ (sl. 66.)



Sl. 66. Kriva $\sigma - \psi$ sa tangentom povučenom u tački koja odgovara postizanju maksimalne sile zatezanja

Konačno se može pisati da je:

$$n = \varphi_M = \ln(1 + \varepsilon_M) \approx 2,3 \log(1 + \varepsilon_M) \quad (5.50.)$$

Ovo znači da će se momenat završetka ravnomernog izduženja dostići onda kada njegoa stvarna logaritamska deformacija postane brojčano jednaka eksponentu deformacionog očvršćavanja materijala.

Veličina ravnomernog izduženja može se odrediti na različite načine.

Najčešće se koristi postupak pri kojem se epruveta istegne toliko da u njoj počne lokalizovanje deformisanja, ili se ona isteže sve do prekida, a onda se meri izduženje one zone epruvete koja je dovoljno udaljena od zone lokalizovanog deformisanja (i zbog toga samo ravnomerno izdužena). Da bi ovo bilo praktično izvodljivo, početna merna dužina epruvete se pogodnim obeležavanjem izdela na više delova, što omogućava da se na kraju izmeri dužina samo jednog ovakvog dela, dovoljno udaljenog od zone lokalizacije (ili mesta prekida — ako je epruveta prekinuta).

Dalje, može se ovo izduženje dobiti putem istezanja dve epruvete do kidanja. Pri tome je jedna od njih duga, a druga kratka. Naime, ravnomerno izduženje će biti

$$\varepsilon_M = 2\varepsilon_{10} - \varepsilon_5 \quad (5.51.)$$

gde su ε_5 i ε_{10} ukuna izduženja posle prekida i to: kratke epruvete — sa mernom dužinom $l_0 = 5d_0$ i duge — sa mernom dužinom $l_0 = 10d_0$. Ovakva mogućnost proizlazi iz činjenice da je zona lokalizovanog deformisanja u oba slučaja iste dužine, tako da se prikazanim oduzimanjem ona eliminiše, a zadržava samo onaj deo epruvete koji je ravnomerno deformisan.

Na osnovu navedenih odnosa može se pisati da je funkcionalna zavisnost stvarnog napona od izduženja

$$\sigma = \sigma_M \left(\frac{\varphi}{\varphi_M} \right)^{\varphi_M} = \sigma_{1M} e^{\varphi_M \left(\frac{\varphi}{\varphi_M} \right)^{\varphi_M}} = \sigma_{1M} \left(\frac{2,71\varphi}{\varphi_M} \right)^{\varphi_M} \quad (5.52.)$$

jer je uopšte

$$\sigma = \sigma_1 e^{\varphi}$$

a konstanta C

$$C = \sigma_{1M} \left(\frac{e}{n} \right)^n = \sigma_{1M} \frac{e^{\varphi_M}}{\varphi_M^{\varphi_M}} \quad (5.53.)$$

U ovim jednačinama je e — osnova prirodnog logaritma.

Koristeći oznake za deformacionu čvrstoću, konačno se može pisati jednačina za krivu očvršćavanja trećeg reda:

$$K = \sigma_{1M} \left(\frac{2,71\varphi}{\varphi_M} \right)^{\varphi_M} \quad (5.54.a)$$

$$\text{tj.} \quad K = K_M \left(\frac{\varphi}{\varphi_M} \right)^n \quad (5.54.b)$$

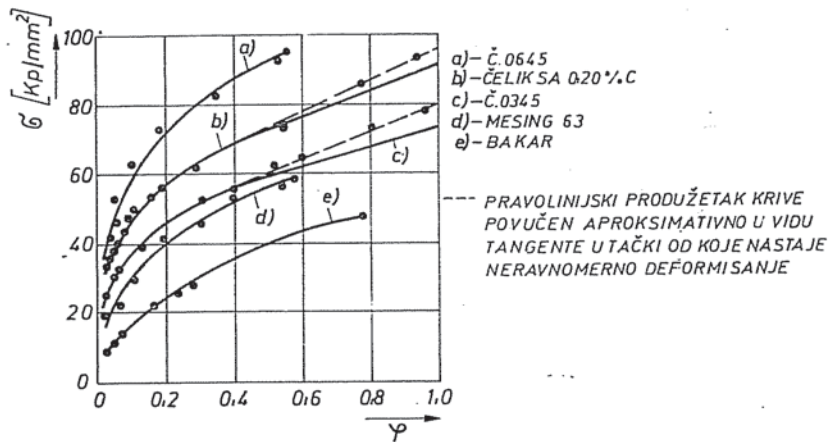
Na sličan način može se dokazati da je za krivu drugog reda

$$K = K_M \left(\frac{\psi}{\psi_M} \right)^{\frac{\psi_M}{1-\psi_M}} = \frac{\sigma_{1M}}{1-\psi} \left(\frac{\psi}{\psi_M} \right)^{\frac{\psi_M}{1-\psi_M}} \quad (5.55.)$$

a za krivu očvršćavanja prvog reda

$$K = K_M \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_M} \right)^{\frac{\varepsilon_M}{1+\varepsilon_M}} = \sigma_{IM} (1 + \varepsilon_M) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_M} \right)^{\frac{\varepsilon_M}{1+\varepsilon_M}} \quad (5.56.)$$

Neki primeri ovakvih krivih, dobijenih pomoću opita žatezanjem, prikazani su na sl. 67., gde su takođe navedeni i eksperimentalni podaci za stvarne napone.



Sl. 67. Krive tečenja (očvršćavanja) nekih materijala

Međutim, prikazane funkcije, i pored relativne jednostavnosti, imaju taj nedostatak što za slučaj kada veličina deformacije teži nuli pokazuju nagli pad napona (koji takođe teži nuli). Ako se pri tome ima u vidu da se ovde podrazumevaju isključivo plastične deformacije, onda je jasno da bi bilo realno da vrednost napona bude jednaka granici razvlačenja σ_T materijala kada je deformacija jednaka (ili bliska) nuli. Zato se ponekad, umesto zavisnosti (5.43.) odn. (5.54.) i sl. upotrebljava

$$K = K_T + B\varphi^m \quad (5.57.)$$

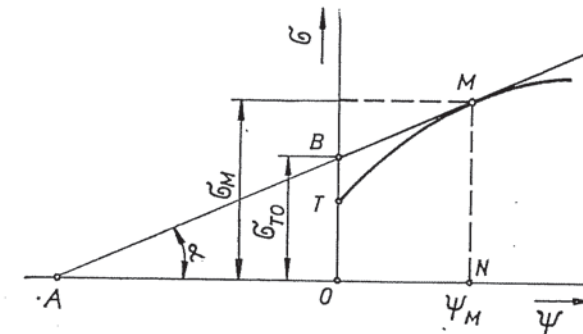
gde je $K_T \approx \sigma_T \approx \sigma_{0.2}$ stvarni napon na početku plastičnog tečenja (približno jednak granici razvlačenja), a B i m konstante zavisne od vrste materijala.

Postoje takođe i drugi izrazi koje su predlagali različiti autori radi analitičke aproksimacije krivih tečenja.

U nekim slučajevima moguće je zadovoljiti se sasvim grubom aproksimacijom koju daje prava linija (kao tangenta povučena, na primer, u tački početka ravnomernog deformisanja (sl. 68.)

$$K = \sigma_{T0} + M\psi \quad (5.58.)$$

gde je: σ_{T0} — tzv. ekstrapolirana granica tečenja (odsečak koji na ordinati odseca tangenta pri $\psi = 0$); M — modul očvršćavanja (tangens ugla nagiba aproksimativne linije); ψ — deformacija (načelno, može biti ma kog vida).



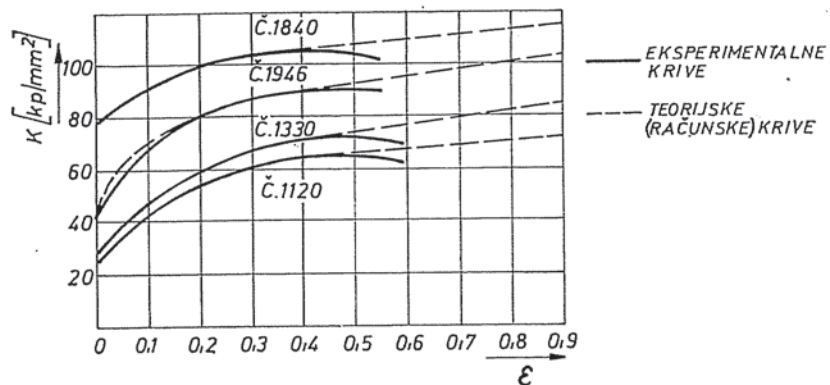
Sl. 68. Aproksimacija krive očvršćavanja pravom linijom

Relativno veliko odstupanje ove linije od stvarne krive u oblasti malih deformacija je očigledno (sa sl. 68. se vidi da, zapravo, postoji samo jedna zajednička tačka). Zato se, prema nekim preporukama, nekada njen položaj nešto menja u odnosu na ovde prikazan, ali se u te mogućnosti na ovom mestu neće ulaziti.

Uopšte treba smatrati da navedene eksponencijalne funkcije predstavljaju dobru aproksimaciju krivih očvršćavanja samo u oblasti ravnomernog deformisanja. U oblasti lokalizovanog deformisanja pri mnogim analizama one se smatraju takođe zadovoljavajućim, mada se tu naponsko stanje menja, prelazeći u prostorno, tako da određivanje stvarnog toka krive očvršćavanja postaje u načelu problematično. Zbog pojave prostornog naponskog stanja i tzv. geometrijskog očvršćavanja (na delu koji se lokalno sužava i menja oblik) kriva očvršćavanja se u ovoj oblasti predstavlja samo uslovno — kao tangenta na krivolinijski deo u tački početka lokalizovanog deformisanja, kako je to napred već istaknuto (sl. 58.).

Na sl. 69. su (prema Šofman-u), prikazane krive tečenja za nekoliko vrsta čelika dobijene eksperimentalno — ispitivanjem na pritisak (isprekidane krive su dobijene računski na osnovu jedne od aproksimacionih jednačina).

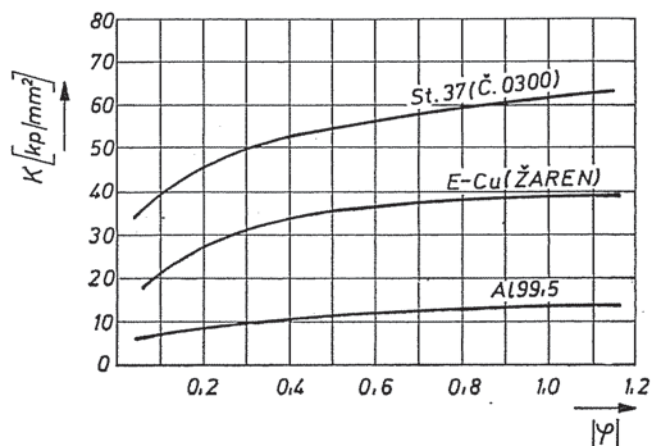
Zasada se najviše određuju krive tečenja na normalnim temperaturama i pri relativno malim brzinama. Tada je proces bli-



Sl. 69. Krive deformacionog očvršćavanja nekih čelika (oznake prema JUS — standardu u zagradi odgovaraju približno oznakama prema standardu GOST) [76]

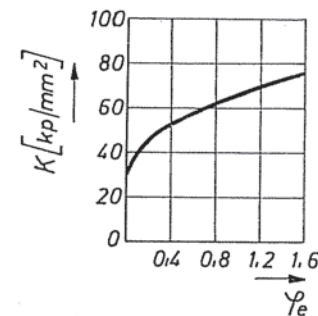
zak izotermičkom, jer se zbog odavanja toplote okolini temperatura tela ne može znatnije povisiti, tako da se praktično ne odvijaju procesi oporavljanja i rekristalizacije.

Na sl. 70—74. prikazane su krive tečenja (tj. deformacionih čvrstoća) još nekih materijala, koje su različiti autori dobili eksperimentalnim putem. Značajno je uvek imati u vidu da one važe samo za strogo određen hemijski sastav, kao i polazno stanje materijala. S obzirom da na njihov tačan oblik i položaj takođe uti-

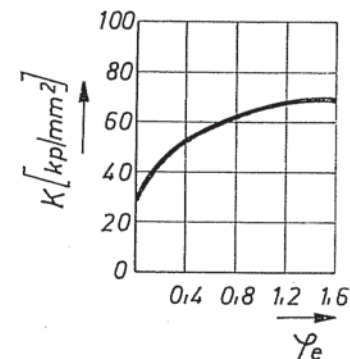


Sl. 70. Krive tečenja nekih materijala dobijene sabijanjem cilindričnih epruveta [42]

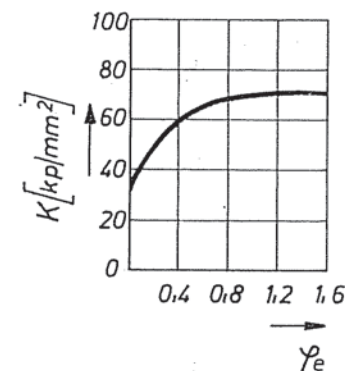
ču i drugi činioci (brzina deformacije, način ispitivanja, temperatura), treba navedene vrednosti ipak primiti kao manje—više orientacione.



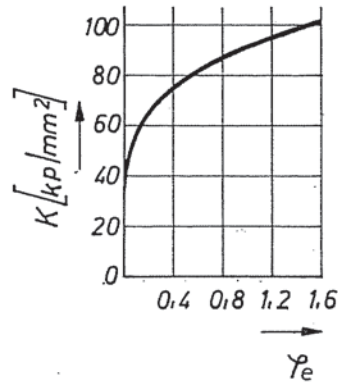
Sl. 71. Kriva deformacionih čvrstoća za čelik St. 34. (Č. 0210) [32]



Sl. 72. Kriva deformacionih čvrstoća za čelik Ck 10 (Č. 1121) [32]



Sl. 73. Kriva deformacionih čvrstoća za čelik Ck 15 (Č. 1221) [32]



Sl. 74. Kriva deformacionih čvrstoća za čelik C 45 (Č. 1530) [32]

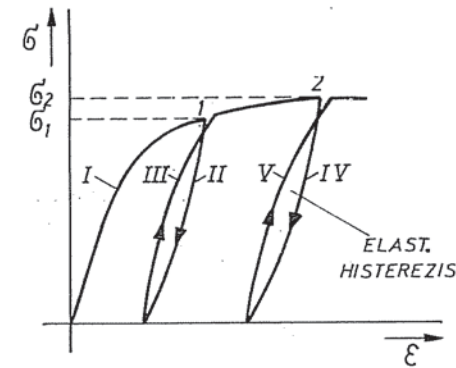
5.6.3. Uticaj prethodnog deformisanja na očvršćavanje metala i njegove mehaničke karakteristike

Pri obradi metala deformisanjem najčešće se ukupna deformacija ostvaruje u nekoliko posebnih stupnjeva. Stoga se pri razmatranju odnosa u okviru jednog stupnja mora uzeti u obzir eventualno deformaciono očvršćavanje koje je ostvareno u prethodnim stupnjevima. U tom smislu realno ponašanje metalnih materijala normalno odstupa od uobičajenih uprošćenih teorijskih postavki i očekivanja. Naime, iskustveno je poznato da je otpor kojim se materijal suprotstavlja deformisanju praktično ipak zavistan i od naponsko-deformacionog stanja, odnosno mehaničke šeme karakteristične za prethodno deformisanje. To onda znači da u širem smislu i deformaciona čvrstoća praktično zavisi od naponskog stanja (tzv. anizotropija deformacione čvrstoće). Ovo će biti bliže objašnjeno na sledećim jednostavnim primerima.

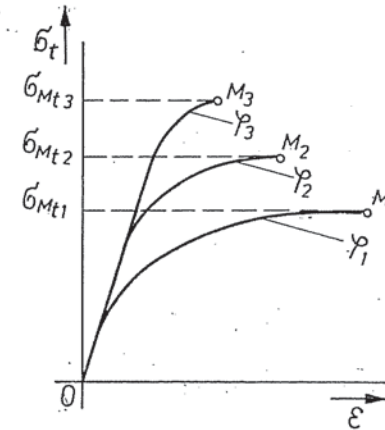
Ukoliko se vrši zatezanje epruvete do nekog iznosa (σ_1) i zatim rasterećenje, onda će ono teći prema sl. 75. (linija II). Ponovno opterećenje (zatezanje) vrši se skoro po istoj liniji (III) prethodnog rasterećenja (uz pojavu manjeg histerezisa), tako da se naponi tečenja ovim uzastopnim rasterećenjima i opterećenjima bitno ne menjaju, pa se praktično ne menja ni zatezna čvrstoća koja se registruje na kraju ovakvog prekidnog opta (u odnosu na zateznu čvrstoću dobijenu uobičajenim kontinualnim zatezanjem).

Međutim, situacija je savim drukčija ako se ispitivanje zatezanjem vrši na epruvetama koje su prethodno bile obrađene nekim vidom obrade deformisanjem (na primer, valjanjem ili dr.).

Naime, zatezna čvrstoća će u tom slučaju rasti sa porastom stepena prethodno izvršene deformacije, dok će karakteristike plastičnosti opadati — sl. 76. (v. takođe i sl. 53).



Sl. 75. Dijagram $\sigma - \epsilon$ za slučaj kada postoji međurasterećenje



$$\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3$$

$$\sigma_{Mt1} < \sigma_{Mt2} < \sigma_{Mt3}$$

γ — STEPEN PRETHODNE DEFORMACIJE

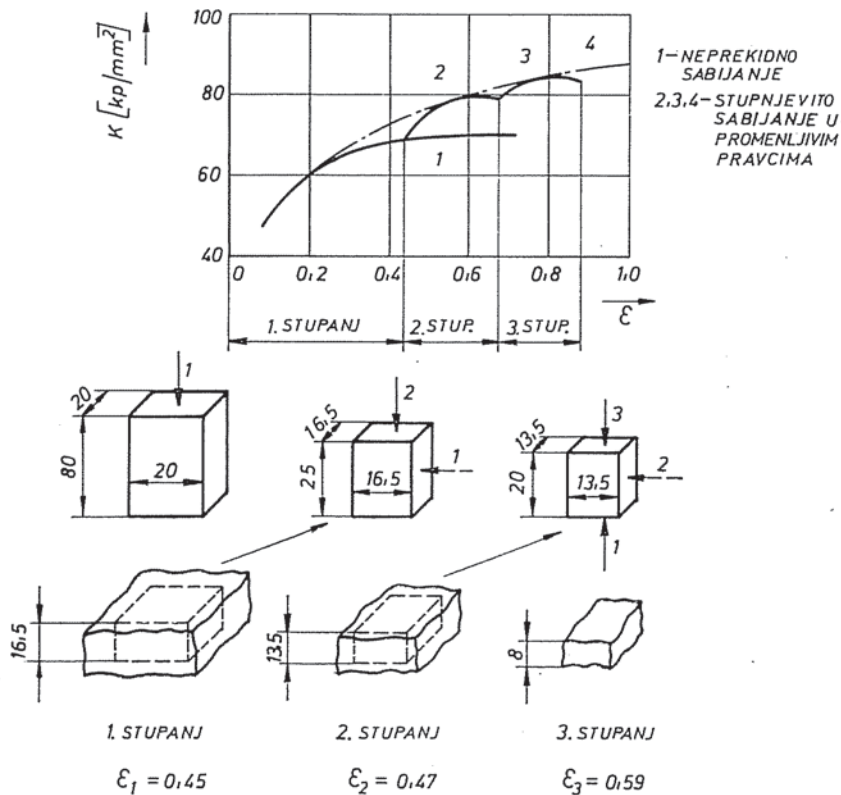
$$\sigma_{Mt} = \frac{F}{A_0} \text{ — ZATEZNA ČVRSTOĆA}$$

Sl. 76. Dijagrami zatezanja ($\sigma_t - \epsilon$) pri različitim stepenima prethodnog deformisanja (γ)

Pojednostavljeno objašnjenje za ovo leži u činjenici da se prethodno nedeformisana epruveta (rekristalisan, odn. neojačan materijal) ravnomerno deformiše samo u relativno malom iznosu, odnosno da je u tom slučaju realno deformisanje manje—više nehomogeno (quasi-homogeno), dok je ono kod prethodno deformisane epruvete ipak homogenije. Drugim rečima, u prvom slučaju deformisanje se vrši najpre u onim preseccima duž epruvete koji

su objektivno najslabiji. Stoga u njima dolazi do očvršćavanja sve dok materijal na tim mestima ne postane čvršći, pa se deformisanje zatim odvija u drugim slabijim zonama, itd., zbog čega se zona intenzivnog deformisanja neprekidno menja. U drugom slučaju, međutim, ovo se ne događa u toj meri, jer su prvobitno slabe zone prethodno već donekle ojačale, a i njihov položaj u odnosu na novi pravac delovanja sile je izmenjen (one tada zahvataju samo manji deo preseka upravnog na novi pravac sile).

Ovde treba primetiti da pri različitim uzastopnim deformisanjima dolazi često i do promene smera smičućih napona koji izazivaju plastično tečenje, tako da ukupna deformacija može čak i da se izgubi, ali do promene u mikrostrukturni ipak dolazi, što dovodi do očvršćavanja i porasta zatezne čvrstoće.



Sl. 77. Dijagram deformacionog očvršćavanja za Č. 1330: 1 — neprekidno sabijanje; 2,3,4 — stupnjevito sabijanje sa promenom pravca

U svakom slučaju, mikrostrukturne promene imaju veliki značaj u ovom smislu.

Brojni eksperimenti su pokazali da svaka promena smera, a i pravca, najveće glavne deformacije dovodi uglavnom do povećanja otpora deformisanju [76], pa se može reći da je deformaciono očvršćavanje neizotropno.

Ovi zaključci istovremeno znače da će i krive tečenja prethodno obrađenih metala praktično imati viši položaj nego neobrađenih. Kao ilustracija u ovom smislu navode se na sl. 77. neki rezultati opsežnijih ispitivanja koje je vršio Šofman [76].

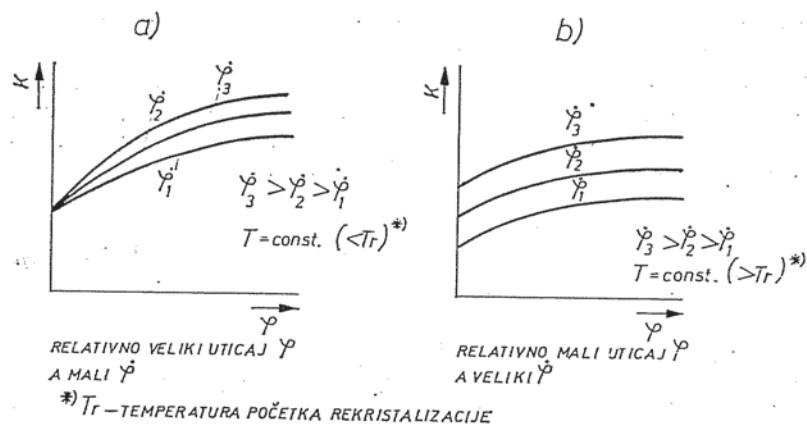
5.6.4. Uticaj brzine deformacije i temperature na veličinu deformacione čvrstoće

Najšire posmatrano, deformaciona čvrstoća zavisi od: svojstava materijala, stepena i brzine deformacije, temperature i stanja strukture (tj. prethodne mehaničke ili termičke obrade). To znači da podatak o deformacionoj čvrstoći određenog materijala može važiti samo za određenu brzinu i temperaturu deformacije, kao i određeno stanje strukture, dok se za neke druge uslove deformisanja često mora vršiti odgovarajuća korekcija. Iz izloženog proizlazi da se podaci o deformacionoj čvrstoći dobijaju uglavnom putem laboratorijskog ispitivanja, pa se nameće pitanje da li se i kada ti podaci mogu koristiti kao merodavni i za uslove obrade, odnosno, da li se mogu kao takvi upotrebiti pri analizi i proračunu parametara tehnološkog procesa. U daljem će biti pokazano da su razlike u mnogobrojnim slučajevima tolike da se nikako ne mogu zanemariti.

U poglavlju o brzini deformacije već je rečeno da sa njenim povećanjem raste i deformaciona čvrstoća. Pri tome se podrazumeva obrada na nekoj određenoj temperaturi, što znači da ovaj porast zavisi, pored ostalog, i od visine temperature. Naime, na višim temperaturama uticaj brzine deformacije na deformacionu čvrstoću je veći nego na nižim temperaturama. To praktično znači da su korekcije s obzirom na brzinu deformacije naročito značajne u slučajevima obrade u toplom stanju (sl. 78).

Ovo treba dovesti u vezu sa pojavom rekristalizacije metalnih materijala na povišenim temperaturama. Rekristalizacija se, inače, obavlja određenom brzinom i ako se ona izvrši u potpunosti, očvršćavanja materijala nema. Naročito je brzina rekristalizacije čelika (a i nekih drugih materijala) mala pri nedovoljnom zagrevanju, tako da u njemu, pri relativno velikim brzinama deformacije, ostaju nerekrystalisana zrna. Drugim rečima, u materijalu može u izvesnoj meri doći do očvršćavanja, usled čega deformaciona čvr-

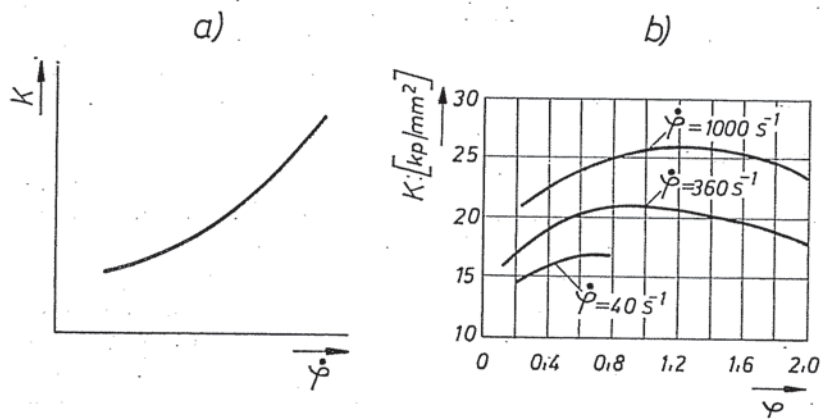
toća raste. Jasno je da će sa smanjenjem brzine deformacije, a pri istim ostalim uslovima, ovo očvršćavanje opadati, jer preostaje više vremena za obavljanje rekristalizacionih procesa.



Sl. 78. Uticaj brzine deformacije na položaj krivih tečenja pri: hladnom (a) i toplom (b) deformisanju

Napominje se da istovremeno sa porastom brzine deformacije dolazi do smanjenja deformabilnosti (granične plastičnosti), odnosno povećanja sklonosti ka krtom razaranju.

Još jedan prikaz uticaja brzine deformacije na veličinu deformacione čvrstoće dat je na sl. 79.

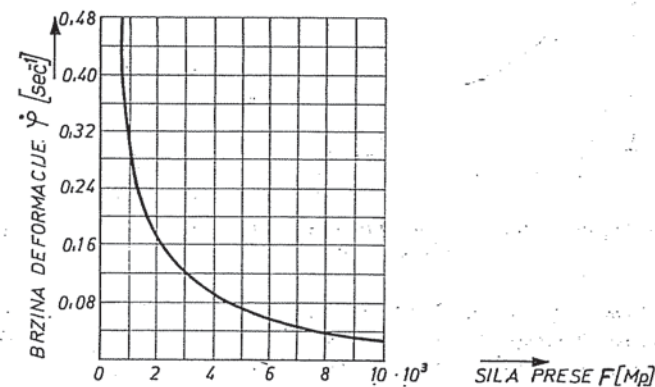


Sl. 79. Uticaj brzine deformacije na veličinu deformacione čvrstoće: a — principijelni prikaz; b — za čelik C 15 (Č. 1220.) na temperaturi $T = 1373 \text{ K}$, prema Bühler-u i Vollmer-u [14]

Prema podacima С. И. Губкин-а [24], na normalnim temperaturama, pri povećanju radne brzine deformacije u odnosu na brzinu pri laboratorijskom ispitivanju za 10 puta, deformaciona čvrstoća se povećava za 5—10%. Kada se brzina poveća za 100 puta, deformaciona čvrstoća poraste za 10—22%, a pri povećanju brzine za 1000 puta, deformaciona čvrstoća raste za 16—34%.

I prema nekim drugim podacima proizlazi da se, na primer, pri povećanju brzine za 1000 puta, deformaciona čvrstoća u hladnom stanju povećava za oko 20%, a pri obradi u toplom stanju za 2—3 puta u odnosu na prvobitnu vrednost*).

Može se približno smatrati da je brzina deformacije pri obradi na mehaničkim presama oko 10—100 puta veća nego pri ispitivanju zatezanjem, tako da je deformaciona čvrstoća u toku obrade za oko 10—20% veća nego što su laboratorijska ispitivanja pokazala. Naime, brzina deformisanja na opitnim mašinama je obično ispod 10 mm/sec, dok je brzina pritiskivača hidrauličnih presa orijentaciono 0,01—0,1 m/sec, mehaničkih presa 0,25—0,50 m/sec, a malja mašinskih čekića u momentu udara 5—10 m/sec. Na sl. 80—82 date su orijentacione vrednosti srednjih iznosa brzina deformacija pri obradi na različitim mašinama [74].

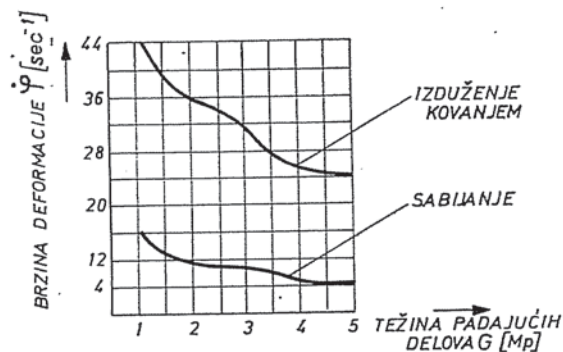


Sl. 80. Orijentacione brzine deformacija pri obradi na hidrauličnim presama

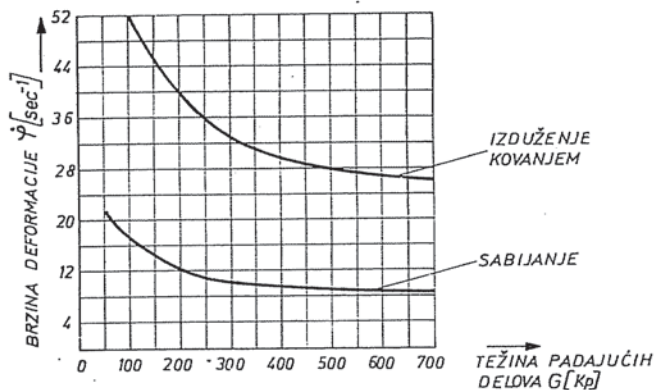
Jasno je da nisu svi metali i legure podjednako osetljivi prema promeni brzine deformacije. Na primer, malougljeni čelici su u tom smislu manje osetljivi nego visokolegirani čelici, itd.

Uopšte se uticaj brzine deformacije na veličinu deformacione čvrstoće pri nekoj stalnoj temperaturi može analitički prika-

*>math>Ove podatke treba shvatiti samo kao orijentaciono-ilustrativne.</math>



Sl. 81. Orijentacione brzine deformacija pri obradi na paro-vazдушnim čekićima

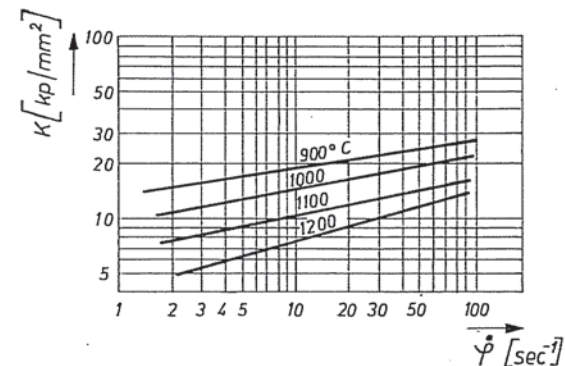


Sl. 82. Orijentacione brzine deformacija pri obradi na pneumatskim (vazдушnim) čekićima

zati na različite načine. Međutim, brojni eksperimenti su pokazali da u dvostruko-logaritamskom koordinatnom sistemu postoji približno linearna zavisnost između deformacione čvrstoće i brzine deformacije pri nekom određenom stepenu deformacije (sl. 83.). Takva zavisnost dovodi u analitičkom obliku do izraza

$$\frac{K}{K_0} = \left(\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}_0} \right)^m \quad (5.59.)$$

gde su: K i K_0 — deformacione čvrstoće materijali pri brzinama deformacije $\dot{\varphi}$ i $\dot{\varphi}_0$, a m — brzinski eksponent čija vrednost zavisi od vrste materijala (prema sl. 83. predstavlja tangens ugla nagiba prave).



Sl. 83. Zavisnost deformacione čvrstoće od brzine deformacije (za ugljenični čelik) — prema P.M. Cook-u (dobijena opitom sabijanjem) [8]

Najčešće se usvaja da je $\dot{\varphi}_0 = 1 \text{ sec}^{-1}$ i za nju se ispituju deformacione čvrstoće K_0 , tako da se odgovarajuća čvrstoća za ma koju brzinu ($\dot{\varphi}$) može izračunati po obrascu:

$$K = K_0 \dot{\varphi}^m \quad (5.60.)$$

Vrednost eksponenta m je prema podacima Krause-a [14] za čelike: X10CrNiTi189 (Č. 4582); CK10 (Č.1221) i St. 37 (Č.0300) pri nižim temperaturama ($\approx 293^\circ\text{K} - 720 \text{ K}$) između $-0,018$ i $0,045$ a pri temperaturama iznad 1150°K između $0,1$ i $0,22$.

Ako se, na primer, želi da dobije promena granice razvlačenja (kao specijalan slučaj deformacione čvrstoće za $\epsilon = 0,002$) pri promeni brzine, onda se može pisati

$$\sigma_T = \sigma_{T0} \left(\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}_0} \right)^m \quad (5.61.)$$

gde se indeks 0 takođe odnosi na ispitane (poznate) laboratorijske veličine.

Navedeni odnos između deformacione čvrstoće i brzine deformacije može da bude poremećen tzv. toplotnim efektom deformisanja. Naročito pri velikim brzinama deformacije znatan deo dovedene energije pretvara se u toplotu, što doprinosi da se u odgovarajućoj meri intenziviraju razočvršćavajući procesi, koji sa svoje strane vode smanjenju deformacione čvrstoće, a povećanju plastičnosti.

Osim toga, brojna ispitivanja su pokazala da izraz (5.59.) nešto bolje odgovara stvarnim odnosima pri deformisanju na tempe-

raturama koje su iznad temperatura početka rekristalizacije, dok je za niže temperature, tj. one na kojima dolazi do deformacionog očvršćavanja, adekvatniji sledeći izraz u polulogaritamskoj formi

$$K = K_0 + c \ln \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}_0} \quad (5.62.)$$

Na primer za granicu razvlačenja biće

$$\sigma_T = \sigma_{T0} + c \ln \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}_0} \quad (5.63.)$$

gde je c — brzinski koeficijent.

Bez obzira na usvojenu aproksimativnu zavisnost, oba navedena brzinska koeficijenta (m i c) određuje se eksperimentalno za svaki materijal u okviru raspoloživog dijapazona brzina pri ispitivanju, a onda se dobijena vrednost ekstrapolira i za oblast većih promena brzina, odnosno za brzine koje se postižu u toku obrade.

U praksi se često ovi odnosi pojednostavljaju korišćenjem jednog drugog brzinskog koeficijenta (a) kojim treba pomnožiti deformacionu čvrstoću dobijenu na opitnoj mašini:

$$K = a K_0 \text{ — pri deformisanju u hladnom stanju} \quad (5.64.)$$

$$K = a \sigma_M \text{ — pri deformisanju u toplom stanju} \quad (5.65.)$$

pri čemu koeficijent a zavisi od odnosa brzina deformacija $\dot{\varphi}/\dot{\varphi}_0$ (v. tabelu 3.), a K_0 je deformaciona čvrstoća dobijena u laboratoriji (odnosno ma koja deformaciona čvrstoća pri brzini $\dot{\varphi}_c$, jer prikazana zavisnost ima širi karakter) i ona za slučaj deformisanja u toplom stanju ima vrednost blisku zateznoj čvrstoći na toj temperaturi (σ_{HM} odn. σ_M — ukoliko se pod ovom oznakom podrazumeva tehnička zatezna čvrstoća, a ne odgovarajući stvarni napon).

U tabeli 4. dati su podaci o brzinskom koeficijentu a u zavisnosti od brzine radnog organa mašine (prema C. И. Губкин-у).

Na jedan od navedenih načina se, dakle, dobija realan iznos deformacione čvrstoće K za uslove obrade, odnosno vrši korekcija čvrstoće K dobijene u laboratorijskim uslovima, s obzirom na promenjenu brzinu deformacije.

Uticaj temperature na veličinu deformacione čvrstoće veoma je složen alko se on posmatra u međusobnoj zavisnosti sa uticajem brzine deformacije, kao i nekih drugih činilaca. Stoga je uobičajeno da se uticaj brzine razmatra posebno — za neku određenu temperaturu, a takođe i uticaj temperature pri određenoj brzini.

Tabela 3

Vrednosti brzinskog koeficijenta a po Губкин-у [24]

$\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}_0}$	Temperatura deformisanja*)			
	$\frac{T}{T_t} < 0,3$	$\frac{T}{T_t} = 0,3-0,5$	$\frac{T}{T_t} = 0,5-0,7$	$\frac{T}{T_t} > 0,7$
10	1,05—1,1	1,1—1,15	1,15—1,3	1,3—1,5
100	1,1—1,22	1,22—1,32	1,32—1,7	1,7—2,25
1000	1,16—1,34	1,34—1,52	1,52—2,2	2,2—3,4
Pri prelasku od brzine $\dot{\varphi} = 10^{-1} \text{ sek}^{-1}$ ka udarnom opterećenju	1,1—1,25	1,25—1,75	1,75—2,5	2,5—3,5

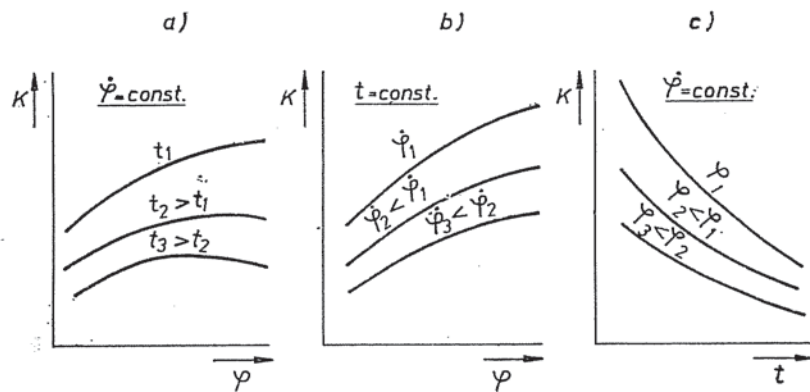
*) T — apsolutna temperatura deformisanja;
 T_t — apsolutna temperatura topljenja metala.

Tabela 4

Brzinski koeficijent a u zavisnosti od brzine radnog organa mašine v

Brzina radnog organa mašine u cm/sec	Temperatura obrade u °C		
	Ispod 0,5 T_t	Iznad 0,5 T_t pri nepotpunom toplom deformisanju	Iznad 0,5 T_t pri toplom deformisanju
10 — 25	1,1	1,4 — 2,4	1,2 — 1,6
25 — 75	1,15	2,4 — 3,0	1,6 — 2,0
> 100	1,25	3,5	2,5
Udarno dejstvo	1,5 — 2,0	5,0	4,0

Alko je brzina deformacije stalna, deformaciona čvrstoća će zavisiti od temperature u tom smislu što će ona pri deformisanju u hladnom stanju, shodno prethodnim objašnjenjima, monotono rasti sa porastom stepena deformacije (sl. 84.), dok će pri deformisanju na dovoljno visokim temperaturama na njen iznos imati uticaj, u većoj ili manjoj meri, razočvršćavajući procesi (oporavljanje i rekristalizacija).



Sl. 84. Šematski prikaz uticaja veličine i brzine deformacije, kao i temperature deformisanja na deformacionu čvrstoću

Ako je temperatura iznad temperature početka rekristalizacije, tj. za čiste metale približno

$$T \geq 0,65 T_1$$

(gde je T_1 — apsolutna temperatura topljenja metala), onda očvršćavanja neće biti i kriva $K = K(\varphi)$ ne raste, a može donekle i opadati u oblasti većih deformacija (sl. 84.a). Ovo opadanje može se objasniti efektom povećane toplote usled deformisanja, koja pojačava razočvršćavajući proces.

Na osnovu ovoga može se reći da krive očvršćavanja u širem smislu predstavljaju zavisnost deformacione čvrstoće od uticajnih činilaca.

Bliže posmatrano, zavisnost deformacione čvrstoće od temperature proizlazi iz određenih termodinamičkih zakonitosti nepovratnih procesa i na osnovu rezultata istraživanja može se prikazati u vidu

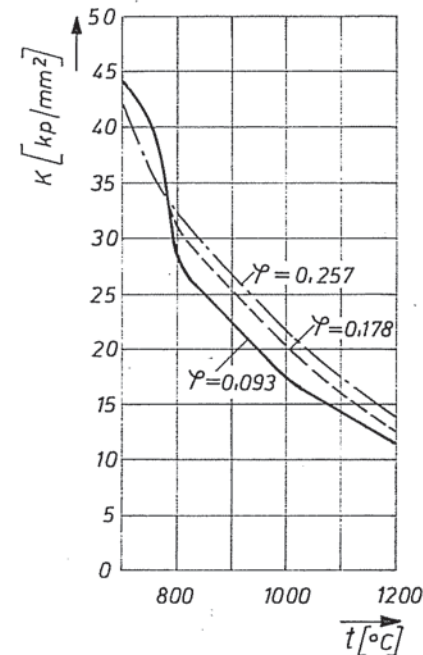
$$K_T = K_t e^{b(T_1 - T)} \quad (5.66.)$$

gde je: K_T — deformaciona čvrstoća pri deformisanju na temperaturi T (apsolutna temperatura); K_t — deformaciona čvrstoća ekstrapolirana do temperature topljenja; b — temperaturni eksponent (koji zavisi od stepena i brzine deformacije, hemijskog sastava, tipa strukturne atomske rešetke i temperature, a određuje se eksperimentalno); T_1 — apsolutna temperatura topljenja.

Ovako postavljena zavisnost važi, prvenstveno za temperaturnu oblast koja odgovara potpunoj rekristalizaciji.

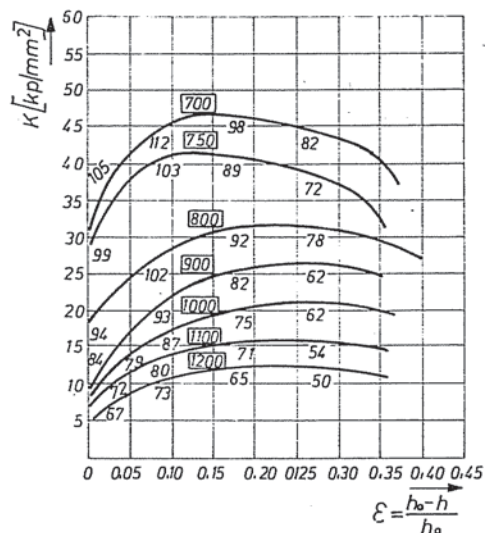
Prema Šofmanu [76], može se temperaturni eksponent uzeti u iznosu $b = 3,5 \cdot 10^{-3}$ za veći broj materijala i temperature koje odgovaraju oblasti potpune rekristalizacije ($T > 0,65 T_1$), a za interval deformacija $0,3 < \varepsilon < 0,7$ i brzine deformacije $\dot{\varphi} \leq 100 \text{ sec}^{-1}$ što, uglavnom, odgovara području obrade u toplom stanju.

U svakom slučaju, sa porastom temperature opada deformaciona čvrstoća. Na sl. 85. prikazana je (prema Wever-u i Lueg-u) ova promena za čelik 16MnCr5 [2]. Brojevi na označenim krivama odnose se na stepene deformacije pri kojima je određivana deformaciona čvrstoća na pojedinim temperaturama.



Sl. 85. Zavisnost deformacione čvrstoće od temperature za čelik 16MnCr5 (č. 4320) pri brzini deformacije $\dot{\varphi} = 79 \text{ sec}^{-1}$ [2]

Još jedan primer istovremenog uticaja temperature i brzine deformacije na veličinu deformacione čvrstoće prikazan je na sl. 86. gde su (prema istim autorima i za isti čelik) pokazane krive tečenja u zavisnosti od iznosa relativnog sabijanja (tj. deformacije), kao i temperatura i brzina. Zaokružene cifre se odnose na temperature sabijanja, a nezaokružene na brzinu deformacije.



Sl. 86. Krive tečenja za čelik 10 Mn Cr 5 u zavisnosti od veličine i brzine deformacije, kao i temperature deformisanja [2]

Vidi se da će, na primer, na nešto nižim kovačkim temperaturama (700° i sl.) deformacione čvrstoće biti relativno velike, a takođe je primetan i uticaj stepena deformisanja na krivu tečenja. Međutim, pri znatno višim temperaturama obrade (na primer, pri 1200°C) deformacione čvrstoće će biti znatno manje, a uticaj stepena i brzine deformacije postaje neznatan, pa se kriva tečenja približava krivoj koja bi odgovarala idealno plastičnom materijalu (skoro horizontalan tok).

Sumirajući sve napred izloženo, može se reći da je na običnoj temperaturi deformaciona čvrstoća zavisna, uglavnom, od vrste materijala i stepena ostvarenog deformisanja, tj.

$$K_H \approx f(\text{mater.}, \varphi) \quad (5.67.)$$

dok u toplom stanju postoji samo mala zavisnost od stepena deformacije (ona je, ipak, nešto primetnija pri relativno malim deformacijama: $\varphi < 0,3$), a veća od temperature i brzine deformacije:

$$K_t \approx f(\text{mater.}, T, \varphi) \quad (5.68.)$$

Međutim, za praktične-inženjerske potrebe u najvećem broju slučajeva izbegava se tačno iznalaženje deformacione čvrstoće na povišenim temperaturama time što se umesto nje koristi za-

tezna čvrstoća materijala na tim temperaturama i tako problem jako pojednostavljuje (jer je ova čvrstoća najčešće poznata kao jedna od osnovnih tehničkih karakteristika materijala).

Sa sl. 87. se vidi da za meki čelik (koji po sastavu približno odgovara čeliku St. 37.) za $|\varphi| > 0,1$ krive tečenja imaju tok koji ne odstupa u velikoj meri od horizontalnog.

Jasno je, dakle, da su navedene mogućnosti za određivanje uticaja brzine i temperature deformacije na deformacionu čvrstoću uglavnom empirijskog karaktera, tj. da zasada ne postoji mogućnost da se ova zavisnost odredi čisto analitičkim putem, generalno za sve materijale.

Ukoliko analiza, ipak, zahteva iznalaženje tačnijih vrednosti za deformacionu čvrstoću na povišenim temperaturama, onda se ona može izračunati iz navedenog obrasca (5.66.), koristeći pri tome eksperimentalne podatke date u odgovarajućoj literaturi.

Za obradu čelika u toplom stanju mogu se koristiti podaci za zateznu čvrstoću na pojedinim temperaturama prema tabeli 5. Slični podaci za bakar i bronzu su u tabeli 6.

Temperature tople obrade treba da, sa jedne strane, obezbede potpunu rekristalizaciju, a sa druge, ne smeju biti ni suviše visoke, kako ne bi došlo do preteranog porasta zrna i jačeg oksidi-

Tabela 5.

Zatezna čvrstoća čelika σ_M^* na povišenim temperaturama

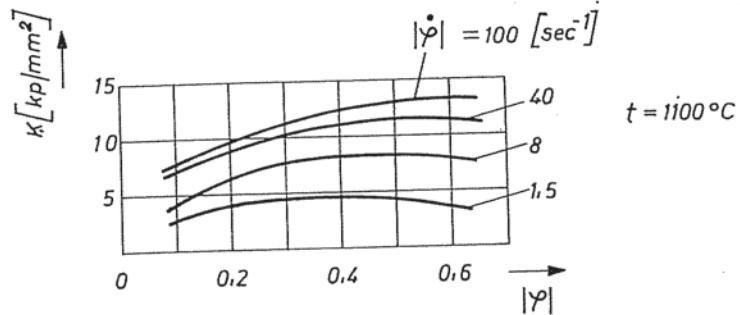
Zatezna čvrstoća u hladnom stanju	Čvrstoća na temperaturi od °C					
	800	900	1000	1100	1200	1300
40	6,6	4,5	3	2,2	1,9	1,4
60	11,1	7,5	5,4	3,6	2,2	2,0
80	16,5	11,1	7,5	5,1	3,6	2,4
100	23	15,9	10,9	6,8	5,0	3,0

Tabela 6.

Zatezna čvrstoća σ_M^* na povišenim temperaturama za bakar i bronzu

Materijal	Temperatura °C			
	700	800	850	900
Bakar	22,5	20,9	19,4	18,7
Bronza	5,0	3,6	2,3	1,0

*) Ovdje se pod uobičajenom oznakom σ_M podrazumeva tehnički napon za koji je ranije korišćen simbol σ_{tM} (samo da bi se u odgovarajućim izrazima istakla razlika u odnosu na stvarni napon τ_M).



Sl. 87. Krive tečenja za nelegiran čelik (približno St. 37., odnosno Č.0360) pri deformisanju na visokoj temperaturi [32]

disanja površinskih slojeva materijala (mada se ovo može sprečiti zagrevanjem u specijalnim pećima sa zaštitnom atmosferom).

Tabela 7.

Pregled različitih uticajnih činilaca i svojstava deformacione čvrstoće K pri hladnom i toplom deformisanju

	Hladno deformisanje ($t < t_r$)	Toplo deformisanje ($t > t_r$)
Znatniji uticaji na K	<ul style="list-style-type: none"> — Svojstva materijala; — stepen def. φ 	<ul style="list-style-type: none"> — Svojstva materijala; — brzina def. φ; — temperatura def. t; — stepen def. φ pri $\varphi > 0,1 \text{ sec}^{-1}$
Manji uticaji na K	<ul style="list-style-type: none"> — Brzina def. φ — temperatura def. t. 	<ul style="list-style-type: none"> — Step. def. φ pri $\varphi \leq 0,1 \text{ sec}^{-1}$
Dobre strane	<ul style="list-style-type: none"> — Povećanje otpornosti materijala usled hladnog def. očvršć.; — veća tačnost radnog predmeta. 	<ul style="list-style-type: none"> — Mala def. čvrstoća; — velika deformabilnost.
Nepovoljne strane	<ul style="list-style-type: none"> — Velika def. čvrstoća; — ograničena deformabilnost. 	<ul style="list-style-type: none"> — Mala tačnost radnog predmeta; — potreban uređaj za zagrevanje.

Sematski sređen pregled ponašanja i svojstava deformacione čvrstoće K pri hladnom i toplom deformisanju dat je u tabeli 7.

5.6.5. Toplotni efekt deformisanja

Energija koju spoljne sile prenose na telo pri plastičnom deformisanju troši se (deli se) u osnovi na: a) potencijalnu energiju elastičnog deformisanja (ona se oslobađa pri rasterećenju), b) potencijalnu energiju akumulisanu u deformisanom telu u vezi sa zaostalim naponima (tj. onaj deo toplote koji se troši na promenu fizičkih svojstava materijala, izraženu preko promene čvrstoće, tvrdoće, električnog otpora i dr.) i c) toplotnu energiju koja se odaje okolnoj sredini ili dovodi do povišenja temperature tela.

Potencijalna energija elastičnog deformisanja može se zanemariti pri obradi metala, jer je relativno mala.

Eksperimentalno je dokazano da akumulisana potencijalna energija pri obradi u hladnom stanju nije veća od 7—15% ukupne energije.

To istovremeno znači da se oko 85—93% ukupne energije pri obradi metala deformisanjem pretvara u toplotnu energiju. Ova toplota dovodi, ili do povišenja temperature tela, ili se odaje okolnoj sredini, zavisno od uslova. Pri velikim brzinama deformacije (na primer, pri kovanju) temperatura tela će rasti i proces poprima približno adijabatski karakter, jer za kratko vreme nije moguće da se toplota prenese na okolinu.

Međutim, ikada je deformisanje lagano (na primer, u najvećem broju slučajeva pri ispitivanju materijala u laboratoriji), toplota se uglavnom predaje okolini i temperatura tela se primetno ne menja (izotermički proces).

Prema tome, sa porastom deformacije javljaju se dve suprotne tendencije u vezi sa promenom deformacione čvrstoće — njen porast usled povećane brzine i smanjenje usled porasta temperature. Kakav će biti konačan efekat zavisi od stepena deformacije (temperatura raste sa porastom ovog stepena), brzine deformacije i vrste materijala. Na primer, pri malim stepenima deformacije neka brzina može dovesti do porasta deformacione čvrstoće, dok će pri većim deformacijama ta ista brzina izazvati smanjenje deformacione čvrstoće, odnosno deformacione sile, usled povećanja specifičnog rada spoljnih sila, tj. većeg zagrevanja metala.

Toplotni efekt je znatno manji pri toplom, nego pri hladnom oblikovanju. Ovo stoga što je za toplo deformisanje potrebna manja energija i što je oslobođena toplota usled deformisanja mala u poređenju sa toplotom (koju inače sadrži zagrejano telo.

6. VEZA IZMEĐU NAPONA I DEFORMACIJA

6.1. DEFORMACIONA TEORIJA

MALIH ELASTIČNO-PLASTIČNIH DEFORMACIJA I TEORIJA PLASTIČNOG TEČENJA

Pri parcijalnoj analizi napona i deformacija nije bilo potrebno uzimati u obzir svojstva materijala, pa izvedeni zaključci imaju univerzalan karakter tj. važe za ma koji materijal.

Na primer, problem deformacija u osnovi se svodi na razmatranje samo geometrijskih odnosa pri promeni relativnih položaja pojedinih tačaka u telu. Imajući ovo u vidu, jasno je da ti odnosi važe, kako za elastično, tako i za plastično deformisanje.

Međutim, već i najobičnije rasuđivanje dovodi do zaključka da se pri uspostavljanju veze između napona i deformacija svojstva materijala obavezno moraju respektovati.

Veza između napona i deformacija u oblasti elastičnosti određena je jednoznačno (na osnovu datih napona mogu se izračunati deformacije koristeći Hukov zakon, bez obzira na to kako su ovi naponi nastali). To međutim, nije slučaj sa ovom vezom u oblasti plastičnosti, gde ona nije jednoznačna (deformacije se ne mogu direktno odrediti samo na osnovu napona, jer one zavise takođe i od kompletne istorije procesa deformisanja).

Korisno je da se u ovom smislu najpre razmotre odnosi koji postoje u oblasti elastičnosti.

U ovoj oblasti postoji proporcionalnost između napona i deformacija. Najšire posmatrano, ta veza se može izraziti preko uopštenog Hukovog zakona (koji je već korišćen pri izvođenju energetskog uslova plastičnosti):

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu_p}{E} (\sigma_y + \sigma_z) \quad (6.1.a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu_p}{E} (\sigma_z + \sigma_x) \quad (6.1.b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu_p}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \quad (6.1.c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1 + \mu_p)}{E} \tau_{xy} \quad (6.1.d)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{2(1 + \mu_p)}{E} \tau_{yz} \quad (6.1.e)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} = \frac{2(1 + \mu_p)}{E} \tau_{zx} \quad (6.1.f)$$

gde je: E — modul elastičnosti materijala, μ_p — Poisson-ov koeficijent, G — modul klizanja.

Napomena u vezi sa Poisson-ovim brojem:

Poisson-ov broj predstavlja odnos između elastične uzdužne deformacije epruvete i elastične deformacije u poprečnom pravcu pri ispitivanju materijala zatezanjem:

$$\nu_p = \frac{\varepsilon_l^*}{\varepsilon_d} \quad (6.2)$$

gde se oznaka l odnosi na dužinu, a d na prečnik epruvete.

Pojedine relativne deformacije su:

$$\varepsilon_l = \frac{l + \Delta l}{l}$$

$$\varepsilon_d = \frac{d + \Delta d}{d}$$

S obzirom da su Δl i Δd vrlo male vrednosti u oblasti elastičnosti, može se približno pisati:

$$(d - \Delta d)^2 \frac{\pi}{4} \Delta l \approx \frac{\Delta d}{2} d \pi l$$

*) Strogo posmatrano, trebalo bi pisati $\nu_p = -\varepsilon_l / \varepsilon_d$ jer je deformacija ε_d negativna. Međutim, ovo nije učinjeno zato što nema uticaja na apsolutni iznos broja ν_p , koji se, inače, uvek smatra pozitivnom veličinom.

(pretpostavka o nepromenljivosti zapremine, što u oblasti elastičnosti ne odgovara savsim realnom stanju, kao što će se niže videti).

Iz toga sledi

$$d^2 \frac{\pi}{4} \Delta l - 2d \Delta d \frac{\pi}{4} \Delta l + (\Delta d)^2 \frac{\pi}{4} \Delta l = d\pi l \frac{\Delta d}{2}$$

Prelazeći na granične vrednosti, tj. sa Δd na dd , odnosno sa Δl na dl postaće drugi i treći član na levoj strani jednačine beskonačno mali (pa se mogu zanemariti), zbog čega se dobija

$$\frac{dd}{d} = \frac{1}{2} \frac{dl}{l}$$

odnosno

$$\varepsilon_l = 2\varepsilon_d = \nu_p \varepsilon_d$$

ili, koristeći ranije usvojene oznake:

$$\varepsilon_1 = \nu_p \varepsilon_2$$

Napomena: u literaturi se često ova karakteristika koristi u recipročnom obliku (kako je to, uostalom, učinjeno i u jednačinama 6.1.) tj. kao Poisson-ov koeficijent:

$$\mu_p = \frac{1}{\nu_p} \quad (6.3.)$$

Međutim, ova teorijska vrednost Poisson-ovog broja uglavnom ne odgovara onoj koja se eksperimentalno iznalazi. Naime, ona () opada lagano sa porastom temperature, dostižući iznos 2 u blizini temperature topljenja. Na primer, za čelik je na običnoj temperaturi približno $\nu_p \approx 10/3 \approx 3,33$, odnosno $\mu_p \approx 0,3$. To znači da se realno prečnik epruvete smanjuje u manjoj meri nego što to proizlazi iz ranije korišćenih odnosa, zasnovanih na pretpostavci o nepromenljivosti zapremine. Drugim rečima, zapremina metala se menja pri elastičnom deformisanju (povećava se ili smanjuje, već prema tome da li se radi o zatezanju ili pritiskivanju). Ova promena zapremine je utoliko veća ukoliko je koeficijent ν_p veći (na primer, za sivo liveno gvožđe njegov iznos se penje čak na 5—9, što znači da je ovaj materijal, zbog postojanja grafitnih uključaka u strukturi, kompresibilniji nego čelik).

Konstante G i E u jednačinama 6.1. međusobno su povezane sledećom relacijom

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu_p)} \quad (6.4.)$$

(za idealnu vrednost $\mu_p = 0,5$ biće $G = E/3$).

Na osnovu jednačina (6.1.) lako se može izvesti sledeći odnos, koji je karakterističan za oblast elastičnosti:

$$\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_z}{\sigma_y - \sigma_z} = \frac{\varepsilon_z - \varepsilon_x}{\sigma_z - \sigma_x} = \frac{\gamma_{xy}}{2\tau_{xy}} = \frac{\gamma_{yz}}{2\tau_{yz}} = \frac{\gamma_{zx}}{2\tau_{zx}} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_c}{\sigma_c} \quad (6.5.)$$

Očigledno je da u geometrijskom smislu ovakva veza govori o postojanju sličnosti Mohr-ovih krugova napona i deformacija u oblasti elastičnosti.

Međutim, u oblasti plastičnosti ovakva zavisnost ne važi u opštem slučaju. Štaviše, univerzalna analitička veza između komponenata napona i deformacija za slučaj konačnog (znatnog) plastičnog deformisanja ne može se nikako uspostaviti (razlog treba tražiti prvenstveno u nepovratnosti procesa plastičnog deformisanja). To znači da u oblasti plastičnosti, u opštem slučaju, nije moguće (kao u oblasti elastičnosti) na osnovu poznatih napona jednoznačno odrediti deformacije, jer istim deformacijama mogu odgovarati različiti naponi i obratno.

Pa ipak, pokazaće se u daljem da je za slučaj malih plastičnih deformacija, a nekada i velikih (kada proces deformisanja ispunjava određene uslove) moguće i u oblasti plastičnosti uslovno uspostaviti slične veze. Pri tome, svakako, neće biti dovoljno da se naponsko-deformacioni odnosi definišu samo za jedan određen trenutak, već ih je potrebno odrediti za čitav posmatrani period procesa deformisanja. Uostalom, već je naglašeno da jednom deformacionom stanju mogu odgovarati različita naponska stanja. To znači da naponsko-deformaciono stanje u jednom trenutku ne može ni karakterisati ukupan proces plastičnog deformisanja, već je zato potrebno znati konkretnu vezu između napona i deformacija u toku čitavog procesa.

Sa stanovišta ovih problema, čitava teorija plastičnosti može se podeliti na dva dela — u zavisnosti od toga od kojih se odnosa polazi pri izvođenju osnovnih jednačina.

U prvom slučaju polazi se od jednačina koje povezuju napone i male deformacije. To je teorija malih elastično-plastičnih deformacija (nekada se naziva i deformačiona teorija plastičnosti). Ova teorija, međutim, gubi važnost ako su u pitanju velike plastične deformacije, jer dalje navedeni odnosi tada više ne postoje.

U drugom slučaju polazi se od jednačina koje povezuju napone i brzine deformacija ili pak male priraštaje plastičnih deformacija i to je tzv. teorija plastičnog tečenja, a ponekada se naziva i teorija priraštaja plastične deformacije*).

U prvoj teoriji (prema H. Hencky-u) smatra se da su devijatori deformacija i napona slični i koaksijalni, ili, drugim rečima, da su komponente devijatora deformacija i komponente devijatora napona proporcionalne (ovo je uvek ispunjeno pri elastičnom deformisanju, a takođe i pri dovoljno malim plastičnim deformacijama, odnosno elastično-plastičnom deformisanju):

$$D_{e_{ij}} = \psi D_{\sigma_{ij}} \quad (6.6.)$$

gde je ψ — skalarni koeficijent koji je uvek pozitivna veličina, a u suštini predstavlja neku funkciju invarijanti devijatora. Lako je pokazati da će se pri $\psi = 1/2G$ dobiti izraz za uopšteni Hukov zakon (veza između napona i deformacija u linearno-elastičnom području).

S obzirom da je ovo samo simboličko zapisivanje i da, u stvari, predstavlja proporcionalnost između odgovarajućih komponentata, neće biti suvišno ako se ona prikaže i u sledećem obliku:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x - \epsilon_m & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y - \epsilon_m & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \epsilon_z - \epsilon_m \end{Bmatrix} = \psi \begin{Bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{Bmatrix} \quad (6.7.)$$

Ova veza, dakle, važi kako za slučaj elastičnih, tako i malih elastično-plastičnih deformacija (tj. kada su elastične i plastične deformacije istog reda veličine). Razlika je samo u tome što je koeficijent proporcionalnosti u linearno-elastičnom području konstantan za sve tačke tela i za čitav proces deformisanja, a za elastično-plastično područje on se menja od tačke do tačke, a takođe zavisi i od veličine ostvarene deformacije. Svakako da se pri tome podrazumeva izotropan materijal koji prethodno nije bio napregnut. Tada se očigledno ne mogu zanemariti elastične de-

* Videće se iz daljeg da nema suštinskih razlika u tome da li će se naponi dovesti u vezu sa brzinama deformacija, ili njihovim priraštajem. U svakom slučaju ovako zasnovana teorija plastičnog tečenja ima kinematski karakter.

formacije, niti promena zapremine (koja je proporcionalna srednjem hidrostatičkom pritisku), jer su u tom slučaju i elastične i plastične deformacije po pretpostavci istog reda veličine.

Ukoliko je, međutim, u pitanju proces deformisanja koji dovodi do većih plastičnih deformacija, u okviru kojeg se u opštem slučaju, na primer, smenjuju naprezanja i rasterećenja (nemoton proces), dolaziće do promene smerova devijatora, zbog čega prednja zavisnost ne može važiti (ona je zasnovana na pretpostavci o poklapanju osa devijatora napona i deformacija u toku čitavog procesa — v. kasniju definiciju prostog, odnosno proporcionalnog naprezanja).

U teoriji plastičnog tečenja (tj. teoriji priraštaja plastičnih deformacija) postavljena je hipoteza* o sličnosti i koaksijalnosti devijatora malih priraštaja plastične deformacije Dd_{ep} i devijatora napona $D\sigma$:

$$Dd_{ep} = d\lambda D\sigma$$

gde je $d\lambda$ neki parametar (to je, zapravo, faktor proporcionalnosti, koji je uvek pozitivna skalarna veličina, ne menja se pri zaokretanju koordinatnog sistema, a može se odrediti samo eksperimentalno — zavisi od: deformacije, temperature, brzine deformacije, mesta i materijala).

Napomena: strogo posmatrano, priraštaj ukupne deformacije de sastoji se od priraštaja elastične de_E i plastične de_P , t.:

$$de = de_E + de_P \quad (6.8.)$$

pa bi zato prednja relacija morala da se napiše kao

$$Dde = d\lambda D\sigma \quad (6.9.)$$

Međutim, kako su pri plastičnom oblikovanju elastične deformacije najčešće relativno male u odnosu na plastične, može se (kako su pokazali još Prandtl i Reuss) smatrati da se ovi priraštaji odnose samo na plastične deformacije, zbog čega je $\epsilon_m = 0$ i $Dde = Tde$ (uslov o nepromenljivosti zapremine pri plastičnom deformisanju), odnosno

* Prva teorijska razmatranja veze između napona i deformacija, kao i pretpostavke o poklapanju osa napona i priraštaja deformacija (a ne ukupnih deformacija) datiraju još od Saint-Venant-a (1870. god.). Ove odnose je uopštio M. Lévy (1871. god), ali su njegovi zaključci dugo ostali uglavnom nepoznati u široj naučnoj javnosti, tako da je, nezavisno od njega, 1913. god. R. von Mises došao do istih rezultata. Zato su danas ove veze i poznate pod nazivom: Lévy-Mises-ove jednačine.

$$Dd\varepsilon \approx Dd\varepsilon_p = Td\varepsilon_p = d\lambda \cdot D\sigma \quad (6.10.)$$

Ekperimentalno je potvrđena ispravnost ove hipoteze, kako za slučaj prostog naprezanja (v. dalja objašnjenja) tako i složenog (jer se po pretpostavci radi o veoma malim deformacijama, odnosno njihovim priraštajima).

Prednja zavisnost se može napisati i u razvijenom obliku — preko komponenata devijatora:

$$d\varepsilon_x = d\lambda(\sigma_x - \sigma_m) \quad (6.11.a)$$

$$d\varepsilon_y = d\lambda(\sigma_y - \sigma_m) \quad (6.11.b)$$

$$d\varepsilon_z = d\lambda(\sigma_z - \sigma_m) \quad (6.11.c)$$

$$d\gamma_{xy} = 2d\lambda\tau_{xy} \quad (6.11.d)$$

$$d\gamma_{yz} = 2d\lambda\tau_{yz} \quad (6.11.e)$$

$$d\gamma_{zx} = 2d\lambda\tau_{zx} \quad (6.11.f)$$

Bliže posmatrano, osnovu ove zavisnosti zapravo čini hipoteza da su i u području velikih plastičnih deformacija u svakom trenutku procesa slični i koaksijalni devijator tenzora napona i devijator brzine deformacije (Prandtl, Reuss):

$$D\varepsilon = \lambda' D\sigma \quad (6.12.)$$

(λ' — skalarni parametar, odnosno faktor proporcionalnosti, koji nema konstantnu vrednost u toku procesa deformisanja).

U razvijenom obliku biće:

$$\dot{\varepsilon}_x = \lambda'(\dot{\sigma}_x - \dot{\sigma}_m) \quad (6.13.a)$$

$$\dot{\varepsilon}_y = \lambda'(\dot{\sigma}_y - \dot{\sigma}_m) \quad (6.13.b)$$

$$\dot{\varepsilon}_z = \lambda'(\dot{\sigma}_z - \dot{\sigma}_m) \quad (6.13.c)$$

$$\dot{\gamma}_{xy} = 2\lambda'\tau_{xy} \quad (6.13.d)$$

$$\dot{\gamma}_{yz} = 2\lambda'\tau_{yz} \quad (6.13.e)$$

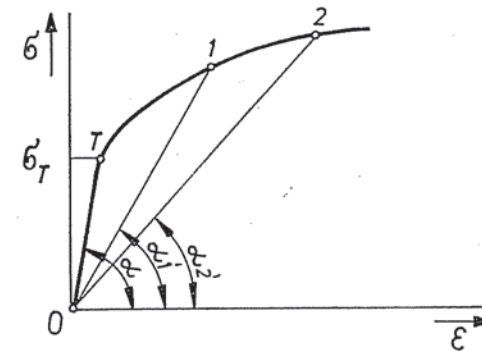
$$\dot{\gamma}_{zx} = 2\lambda'\tau_{zx} \quad (6.13.f)$$

Sasvim je očigledno da se ove zavisnosti mogu dobiti direktno deljenjem jednačina (6.10.) odn. (6.11.) sa delićem vremena dt u kome su nastali priraštaji $d\varepsilon$ i $d\gamma$, što govori o suštinski istoj zakonitosti.

Prikazano poklapanje (u granicama praktične tačnosti) glavnih osa napona sa glavnim osama brzine deformacije za svaku materijalnu česticu tela, kako za slučaj malih, tako i za slučaj velikih deformacija (uključujući i slučajeve složenog naprezanja, a ne samo prostog) potvrđeno je eksperimentalno. Pri tome se polazi od pretpostavke da se pravac algebarski najvećeg glavnog napona poklapa sa pravcem materijalnog vlakna koje se najbrže izdužuje, a pravac algebarski najmanjeg glavnog napona sa pravcem vlakna koje se najbrže skraćuje.

Bez obzira na prividnu sličnost (odnosno analogiju) prikazanih zavisnosti (6.6.) i (6.9.) odnosno (6.12.), između njih ipak postoji suštinska razlika. Naime, parametar ψ je konstantan za čitav proces elastičnog deformisanja (na primer $\psi = 1/2G$), dok su za slučaj plastičnog deformisanja parametri $d\lambda$ i λ' , promenljivi i zavise od: svojstava materijala, vremena i koordinata posmatrane tačke. Osnovna specifičnost ovih parametara ($d\lambda$ i λ') je u tome što oni, iako mogu imati različite vrednosti (zavisno od položaja tačke i vremena), ipak, u posmatranom trenutku procesa i za posmatranu tačku imaju jednu istu vrednost za sve komponente tenzora napona i brzine deformacije (odnosno priraštaja deformacije). Zato se za njih i kaže da su opšti parametri.

Da bi se ovo lakše shvatilo, izvršice se i sledeće uprošćeno razmatranje. Posmatraće se dijagram napon—izduženje, koji se dobija pri uobičajenom ispitivanju materijala zatezanjem (sl. 88.). Lako je zaključiti da je tangens ugla nagiba pravolinijskog dela



Sl. 88. Uglovi čiji tangensi predstavljaju modul elastičnosti ($\operatorname{tg} \alpha$) i modul plastičnosti ($\operatorname{tg} \alpha'$)

dijagrama jednak modulu elastičnosti materijala ($\text{tg } \alpha = E$), koji je konstanta za određen materijal i predstavlja faktor proporcionalnosti između napona i maksimalne glavne deformacije ($\sigma = E\varepsilon$).

Međutim, u oblasti plastičnosti (tačke 1, 2... na dijagramu) odgovarajući uglovi ($\alpha'_1, \alpha'_2, \dots$) su promenljivi, pa su im promenljivi i tangensi. Koristeći njihove veličine, mogli bi se naponi u oblasti plastičnosti izraziti u zavisnosti od deformacija kao

$$\sigma = \text{tg } \alpha' \cdot \varepsilon = E' \varepsilon^*)$$

gde je $E' \neq \text{const}$ — modul plastičnosti, ili modul deformacije. Ovaj modul će nešto kasnije ponovo biti uključen u razmatranje (6.22.; 6.23.).

Iz jednačina (6.11.) i (6.13.) proizlazi da postoje sledeće proporcije:

$$\frac{d\varepsilon_x}{d_x} = \frac{d\varepsilon_y}{d_y} = \frac{d\varepsilon_z}{d_z} = \frac{d\gamma_{xy}}{2\tau_{xy}} = \frac{d\gamma_{yz}}{2\tau_{yz}} = \frac{d\gamma_{zx}}{2\tau_{zx}} = d\lambda \quad (6.14.)$$

$$\frac{\varepsilon_x}{d_x} = \frac{\varepsilon_y}{d_y} = \frac{\varepsilon_z}{d_z} = \frac{\gamma_{xy}}{2\tau_{xy}} = \frac{\gamma_{yz}}{2\tau_{yz}} = \frac{\gamma_{zx}}{2\tau_{zx}} = \lambda' \quad (6.15.)$$

gde su: $d_x; d_y; d_z$ — dijagonalne komponente devijatora napona.

Ove jednačine izražavaju zakon plastičnog tečenja izotropnog materijala. On, dakle, pokazuje da postoji proporcionalnost između komponenta devijatora malih priraštaja, odnosno brzina deformacija i napona. To istovremeno znači da je naponsko stanje određeno trenutnim priraštajem komponenta plastične deformacije (tj. njihovim brzinama).

Okolnost da se ovde ne pojavljuju komponente napona, već komponente devijatora napona treba tumačiti činjenicom da na proces plastičnog tečenja srednji normalni napon nema nikakvog uticaja.

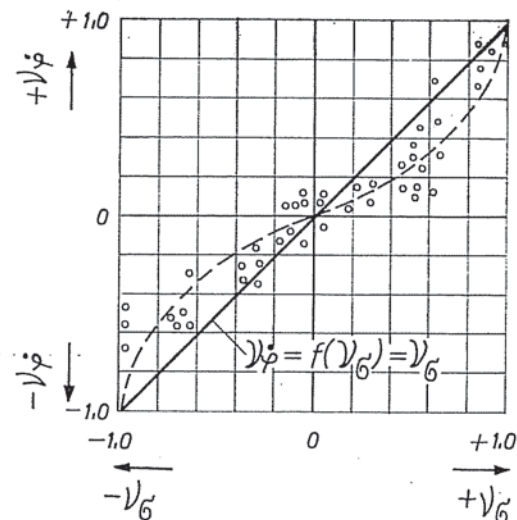
Već je rečeno da hipoteza na kojoj počiva ovaj zakon nema analitičku podlogu, ali se može proveriti eksperimentalno. Naime, nije teško pokazati da će navedeni odnosi važiti ako su međusobno iste vrednosti koeficijenta napona i brzine deformacije:

$$v_\sigma = v_\varepsilon \quad \text{odnosno} \quad v_\sigma = v_{\dot{\varphi}} \quad (6.16.)$$

*) Uopštenije posmatrano, umesto napona zatezanja σ može se staviti ekvivalentni napon σ_e , a za deformaciju uzeti ε_e , pa je tada:

$$E' = \sigma_e / \varepsilon_e$$

Na sl. 89. prikazana je grafički (prema Lode-u i dr.) ovakva zavisnost (prava linija) kao i rezultati njene eksperimentalne provere. Mada podudarnost nije potpuna (v. isprekidanu liniju koja aproksimira raspored eksperimentalno dobijenih tačaka), ipak se može prihvatiti da je prednja jednakost približno zadovoljena.



Sl. 89. Zavisnost između koeficijenta ν_φ i ν_σ [32; 42]

Dakle, izjednačavajući koeficijente napona i brzine deformacije dobija se:

$$\frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}$$

Posle uvođenja srednjeg napona σ_m biće

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_m}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2 - \sigma_1} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\sigma_1 - \sigma_3}$$

Dalje, ako se uvrsti u izraz napred definisan modul plastičnosti $E' = \text{tg } \alpha'$ (sl. 88.) dobija se po analogiji sa (6.5.)

$$\frac{\dot{\varepsilon}_2}{\sigma_2 - \sigma_m} = \frac{\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \lambda' = \frac{3}{2E'}$$

Na sličan način se dobija da je

$$\frac{\dot{\varepsilon}_1}{\sigma_1 - \sigma_m} = \frac{\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \lambda' = \frac{3}{2E'}$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}_3}{\sigma_3 - \sigma_m} = \frac{\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \lambda' = \frac{3}{2E'}$$

iz čega sledi veza

$$\frac{\dot{\varepsilon}_1}{\sigma_1 - \sigma_m} = \frac{\dot{\varepsilon}_2}{\sigma_2 - \sigma_m} = \frac{\dot{\varepsilon}_3}{\sigma_3 - \sigma_m} = \lambda' = \frac{3}{2E'} \quad (6.17.)$$

što pokazuje da se eksperimentalnom proverom jednakosti $v_\sigma = v_\varepsilon$ može ujedno proveriti ispravnost hipoteze na kojoj počiva zakon plastičnog tečenja.

Nije teško zaključiti da bi korišćenje ovih jednačina pri rešavanju praktičnih problema bilo skopčano sa nizom teškoća. Zato se one u ovom obliku češće koriste u matematičkoj teoriji plastičnosti, dok se za inženjerske potrebe i eksperimentalne analize slični odnosi takođe mogu koristiti, ali samo u ograničenom broju slučajeva.

Naime, brojna razmatranja su pokazala, a opiti potvrdili, da se navedene veze između napona i beskonačno malih plastičnih deformacija mogu takođe dalje proširiti na male i velike konačne deformacije, ukoliko su ispunjeni uslovi o monotonosti procesa deformisanja, odnosno ukoliko su naprezanja prosta (proporcionalna).

Prosto ili proporcionalno naprezanje postoji onda kada spoljne sile, koje deluju na posmatrani element, od početka rasti proporcionalno jednom opštem parametru (što znači da se komponente tenzora napona menjaju proporcionalno tom opštem parametru, pa se u toku procesa ne menja ni koeficijent napona v_σ , a ni odnos komponentata devijatora, tj. $d_1:d_2:d_3 = \text{const}$). Osim toga, pri ovakvom naprezanju se poklapaju glavne ose napona i deformacija u toku celog procesa. Imajući to u vidu, kao i napred navedene proporcije, može se takođe govoriti i o proporcionalnom deformisanju.

Ako u složenijim slučajevima uslovi o proporcionalnom naprezanju nisu ispunjeni, često je moguće da se čitav proces podeli u više faza, u okviru kojih će to biti slučaj (u potpunosti ili bar približno).

Iako se pravci glavnih osa i vrste naponskih stanja mogu u opštem slučaju menjati u toku procesa, ne mogu se nikako uništiti posledice plastičnog deformisanja koje je posmatrana zona pretrpela u prethodnim stadijumima. To znači da glavne ose i vrste naponskih stanja ne moraju da se podudaraju sa glavnim osama i vrstom konačne plastične deformacije. Međutim, u granicama praktične tačnosti, moguće je smatrati da se ove ose poklapaju pri prelasku iz bliskog prethodnog stadijuma u posmatrani. U tome i jeste osnovni smisao i opravdanje ove podele složenijih procesa na više etapa.

Upoređujući ranije navedene karakteristike monotonog deformisanja sa ovim karakteristikama prostog naprezanja, može se zaključiti da prosto naprezanje, u stvari, vodi ka monotonom deformisanju, pa su ova dva uslova u osnovi ekvivalentna (uslov monotonosti je samo odraz prostog naprezanja).

Ukoliko su ovi uslovi ispunjeni (što istovremeno znači da je $v_\sigma = v_\varepsilon$), onda se umesto priraštaja deformacija u jednačine (6.11.) mogu uvrstiti velike deformacije (φ)*, pa se posle međusobnog oduzimanja dobijaju jednačine plastičnog tečenja u obliku

$$\frac{\varphi_x - \varphi_y}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\varphi_y - \varphi_z}{\sigma_y - \sigma_z} = \frac{\varphi_z - \varphi_x}{\sigma_z - \sigma_x} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{\sigma_3 - \sigma_1} = \lambda \quad (6.18.a)$$

Razume se da će utoliko pre isti odnos važiti i za male plastične deformacije:

$$\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_z}{\sigma_y - \sigma_z} = \frac{\varepsilon_z - \varepsilon_x}{\sigma_z - \sigma_x} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{\sigma_3 - \sigma_1} = \lambda \quad (6.18.b)$$

Posebna pogodnost ovakve veze u odnosu na sličnu koja bi se mogla uspostaviti prema deformacionoj teoriji elastično-plastičnih deformacija jeste u tome što ovde nije potrebno uzimati u obzir promenu zapremine, s obzirom da se elastične deformacije sasvim zanemaruju.

Iz izloženog proizlazi da se nikako ne sme ispustiti iz vida da su ovakve neposredne veze između napona i konačnih deformacija u oblasti plastičnosti (bez uzimanja u obzir brzine defor-

*) U protivnom može važiti samo $v_\sigma = v_\varphi$

PROPORCIONALNO

velike
malih
deformacija

macije) moguće samo pod navednim uslovima, ali da u opštem slučaju, kada je telo izloženo složenom naprezanju i znatnom stepenu deformisanja, njih nije moguće uspostaviti (dok veze između napona i brzina deformacija, odnosno malih priraštaja deformacija, i tada ostaju na snazi).

Na osnovu ovih i ranijih stavova jasno je da će se pri znatnijem deformisanju nekog tela najčešće izgubiti uslov o proporcionalnom (prostom) naprezanju u odnosu na čitavu njegovu zapreminu, ali za neku manju zonu taj uslov može biti ispunjen potpuno ili približno.

Faktor proporcionalnosti $d\lambda$ može se odrediti na taj način što će se jednačina plastičnog tečenja primeniti, na primer, na najjednostavniji slučaj — jednoosno zatezanje. Tada se dobija

$$d_1 = \sigma_1 - \sigma_m = \frac{2}{3} \sigma_1 \quad (\text{jer je } \sigma_m = \sigma_1/3)$$

Osim toga, u ovom slučaju je $\sigma_1 = \sigma_e = K$.

Ako se u osnovnoj jednačini (2.42.) za uopšteni tengencijalni napon zamene pojedine naponske komponente izrazima koji proizlaze iz jednačina (6. 11.), onda se dobija

$$\tau_e = \frac{d\gamma_e}{2d\lambda} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}}$$

a kako je

$$\overline{d\gamma_e} = \sqrt{3} \overline{d\epsilon_e}$$

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\epsilon_e}{\sigma_e} = \frac{3}{2} \frac{d\epsilon_e}{K} \quad (6.19.a)$$

Napomena: pri ovome se oznake $\overline{d\epsilon_e}$ i $\overline{d\gamma_e}$ odnose na uopštene beskonačno male priraštaje deformacija, a ne na diferencijale izraza za ϵ_e i γ_e . Naime, $d\epsilon_e$ i $d\gamma_e$ se dobijaju na taj način što se u jednačine (3.38.) i (3.39.) uvrste beskonačno mali priraštaji deformacija $d\epsilon_1$; $d\epsilon_2$ i $d\epsilon_3$ umesto ϵ_1 ; ϵ_2 i ϵ_3 .

Deformaciona čvrstoća K se za posmatranim trenutak, odnosno deformacioni priraštaj u tom trenutku (tačnije malom vremenskom intervalu), može odrediti na osnovu eksperimentalno ustanovljene zavisnosti $K = K(\epsilon_e)$, pa se zatim iz prednjeg izraza određuje $d\lambda$. Treba primetiti da se na isti način dolazi i do parametra λ' jer se on dobija deljenjem $d\lambda$ sa dt .

Međutim, za slučaj proporcionalnog naprezanja umesto $d\epsilon_e$ može se uvrstiti ϵ_e ili φ_e , pa je tada

$$\lambda = \frac{3}{2} \frac{\epsilon_e}{\sigma_e} = \frac{3}{2} \frac{\varphi_e}{K} \quad (6.19.b)$$

tako da se korišćenjem krive $K = K(\varphi_e)$ može odrediti ovaj parametar (v. takođe i jednačine (6.24.) i (6.25.).

Korisno je napomenuti da se prikazani odnosi mogu dobiti neposredno iz Mohr-ovih dijagrama napona i deformacija (jer po pretpostavci oni moraju biti slični da bi navedena zavisnost mogla da se primeni i za slučaj plastičnih deformacija*). Na osnovu jednostavnog upoređenja (sl. 90.) može se pisati:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2G'(\epsilon_1 - \epsilon_2) \quad (6.20.a)$$

$$\sigma_2 - \sigma_3 = 2G'(\epsilon_2 - \epsilon_3) \quad (6.20.b)$$

$$\sigma_3 - \sigma_1 = 2G'(\epsilon_3 - \epsilon_1) \quad (6.20.c)$$

$$\tau_{12} = G'\gamma_{12} \quad (6.20.d)$$

$$\tau_{23} = G'\gamma_{23} \quad (6.20.e)$$

$$\tau_{31} = G'\gamma_{31} \quad (6.20.f)$$

gde je G' koeficijent proporcionalnosti (tzv. koeficijent drugog reda).

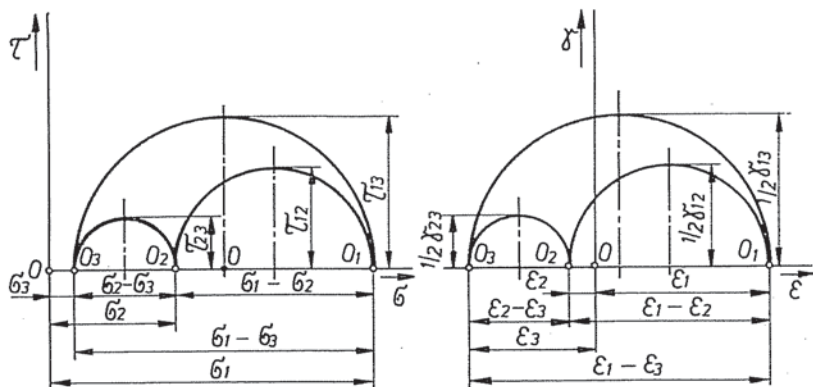
Jasno je da se slični izrazi mogu napisati i za komponente u pravcu proizvoljnih osa (a ne glavnih).

Kada se, na primer, u drugoj po redu navedenoj jednačini (6.20.b) zameni — $\epsilon_3 = \epsilon_1 + \epsilon_2$ dobija se

$$\sigma_2 - \sigma_3 = 2G'(2\epsilon_2 + \epsilon_1)$$

$$\epsilon_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3 - 2G'\epsilon_1}{4G'}$$

*) U oblasti elastičnosti Mohr-ovi krugovi napona i deformacija su, kako je već napomenuto, uvek slični, tako da je tada prikazana zavisnost sasvim očigledna i ne treba je dokazivati. Ova sličnost istovremeno podrazumeva i jednakost koeficijenata ν_{σ} i ν_{ϵ} , koja inače i predstavlja jedan oblik veze između napona i deformacija.



Sl. 90. Mohr-ovi dijagrami za napone i deformacije

a kada se ova vrednost zameni u prvoj jednačini biće

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2G' \left(\epsilon_1 - \frac{\sigma_2 - \sigma_3 - 2G'\epsilon_1}{4G'} \right)$$

$$\epsilon_1 = \frac{1}{3G'} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right] \quad (6.21.a)$$

Na analogan način može se dobiti da je

$$\epsilon_2 = \frac{1}{3G'} \left[\sigma_2 - \frac{1}{2} (\sigma_3 + \sigma_1) \right] \quad (6.21.b)$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{3G'} \left[\sigma_3 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \right] \quad (6.21.c)$$

a posle zamene $3G' = E'$

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E'} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right]$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E'} \left[\sigma_2 - \frac{1}{2} (\sigma_3 + \sigma_1) \right]$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{E'} \left[\sigma_3 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \right] \quad (6.22.c)$$

Modul plastičnosti E' naziva se, za razliku od G' , još i koeficijent proporcionalnosti prvog reda.

Iz ovih izraza se može uočiti napred naznačena analogija s obzirom na vezu između napona i deformacija u oblasti elastičnosti (6.1.), s tim što je konstantan modul elastičnosti E zamenjen promenljivim modulom plastičnosti E' .

Nije teško pokazati da se prednja zavisnost može skraćeno pisati u obliku

$$\sigma_c = E' \epsilon_c \quad (6.23.)$$

Upoređujući usvojene parametre dobija se odnos

$$\lambda = \frac{3}{2E'} = \frac{1}{2G'} \quad (6.24.)$$

tako da se analogna veza može uspostaviti i između uopštene ugaone deformacije (klizanja) γ_c i uopštenog smičućeg napona τ_c :

$$\tau_c = G' \gamma_c \quad (6.25.)$$

(što je takođe analogno proporciji u oblasti elastičnosti $\tau = G\gamma$).

Ovim je objašnjen i smisao brojčanih koeficijenata koji su ispisivani ispred parametara E' i G' (pri ovome je analogija sa odnosima napona i deformacija u oblasti elastičnosti još više istaknuta uvođenjem i sličnih oznaka za module: $E \rightarrow E'$ i $G \rightarrow G'$).

Učinjenim proširenjem zakona plastičnog tečenja (koji u osnovi važi samo za male pri rastaje deformacija) na slučaj velikih deformacija, uz pretpostavku o monotonosti procesa, odnosno prostog naprezanja, omogućeno je rešavanje različitih praktičnih problema uz korišćenje eksperimentalnih podataka.

Na osnovu svega može se zaključiti da su odnosi između napona i deformacija u oblasti plastičnosti složeni u opštem slučaju, tako da se relativno retko može na osnovu poznavanja deformacionog stanja izvesti zaključak o naponskom, ili obrnuto (ranije je bilo pokazano da jednom deformacionom stanju ne mora odgovarati samo jedno naponsko). Ipak, ova mogućnost nije ni sasvim isključena, jer se u nizu slučajeva sreću, bar približno, procesi bliskog monotonom deformisanju, što odnose između napona i deformacija svodi na one koji važe za slučaj malih deformacija.

Osim toga, treba uvek imati u vidu da se veza između napona i deformacija na prikazan način najčešće može ustanoviti samo za relativno male zone, odnosno materijalne čestice, dok je za njeno definisanje u nekoj široj zoni, ili čitavom telu, potrebno eksperimentalnim putem ustanoviti ovu zavisnost na većem broju

mesta (na primer, pomenutim prethodnim nanošenjem eksperimentalne merne mreže na odgovarajuće površine i merenjem stepena dilatacija i zaokretanja njenih elemenata posle određene faze deformisanja). Svakako da se pri tome mora voditi računa da navedeni uslovi monotonosti deformisanja treba stalno da budu ispunjeni (bar približno), kako bi dobijeni rezultati bili bliski realnosti.

Da bi se bliže predočila mogućnost praktične primene prikazanih relacija teorije plastičnog tečenja, u narednom poglavlju će se izložiti jedan primer u tom smislu. On se odnosi na eksperimentalno-analiitičko iznalaženje naponsko-deformacionog stanja pri izvlačenju delova od tankog lima, kao i pokazatelja njegove granične deformabilnosti pri ovoj obradi.

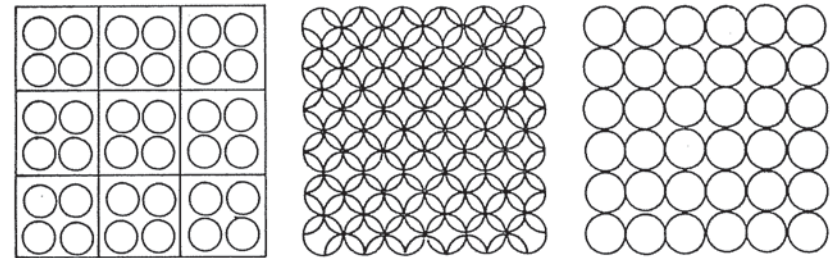
6.2. PRIMER PRIMENE TEORIJE PLASTIČNOG TEČENJA

Eksperimentalno-analiitička metodologija analize stabilnosti deformisanja pri izvlačenju geometrički nepravilnih delova od lima (za slučaj dvoosnog naponskog stanja)

U najvećem broju slučajeva može se približno smatrati da su pojedini elementi lima koji se obrađuje izvlačenjem napregnuti samo u ravni (ravansko naponsko stanje). Osim toga, često se pravci osa napona i deformacija međusobno poklapaju, tako da se pojedini elementi lima izdužuju, odnosno skraćuju, u pravcu glavnih osa napona. Iznos ovih lokalnih deformacija može se, kao što je napred napomenuto, ustanoviti eksperimentalno prethodnim nanošenjem merne mreže na površinu lima i merenjem veličine njenih elemenata posle izvlačenja. Danas se ovo nanošenje merne mreže najčešće vrši elektrohemijiskim putem. Najpogodnije je da ona bude sastavljena od malih kružića prečnika 1—20 mm*). Naime, posle deformisanja ovi kružići prelaze u elipse čije se dijagonale mogu izmeriti i tako odrediti glavne deformacije na tom mestu. Pri tome se, očigledno, uvek dobijaju invarijantni odnosi, što ne bi bio slučaj, na primer, sa kvadratnom mrežom, jer se orijentacija kvadrata u opštem slučaju ne poklapa sa orijentacijom glavnih osa (tada bi za dobijanje invarijantnih odnosa morale da se uzmu u obzir i ugao deformacije, što bi znatno komplikovalo

*) Manje dimenzije kruga omogućuju merenje deformacija u užim zonama, a time i tačnije iznalaženje rasporeda deformacija i mesta njihove najveće koncentracije. Pri izboru prečnika krugova mora se prvenstveno voditi računa o potrebi da se deformacija unutar jednog kruga može smatrati jednorodnom (homogenom).

postupak). Sem toga, orijentacija elipsi ukazuje ujedno i na orijentaciju glavnih osa. Na sl. 91. pokazani su oblici nekih mernih mreža koje se primenjuju u ovu svrhu.



Sl. 91. Različiti oblici merne mreže koja se nanosi na lim

Ako je prečnik još nedeformisanog kruga mreže d_0 , a prečnici elipse d_1 (najveći) i d_2 (najmanji), onda su odgovarajuće logaritamske deformacije definisane kao:

$$\varphi_1 = \ln \frac{d_1}{d_0} \quad (6.26.a)$$

$$\varphi_2 = \ln \frac{d_2}{d_0} \quad (6.26.b)$$

$$\varphi_3 = -(\varphi_1 + \varphi_2) \quad (6.26.c)$$

pri čemu se indeksi 1, 2 i 3 odnose na glavne ose.

Za slučaj prostog (proporcionalnog) naprezanja biće (u skladu sa 6.11. odn. 6.18.)

$$\frac{\varphi_1}{d_1^*} = \frac{\varphi_2}{d_2^*} = \frac{\varphi_3}{d_3^*} = \frac{3}{2} \frac{\varphi_e}{\sigma_e} \quad (6.27.)$$

gde su: d_1^* ; d_2^* ; d_3^* — komponente devijatora napona (za razliku od prečnika elipse, označene su zvezdicom); φ_e — ekvivalentna (uopštena) deformacija; σ_e — ekvivalentni (uopšteni) napon.

Polazeći od pomenute i manje—više realne pretpostavke da je $\sigma_3 = 0$, kao i uvodeći oznaku za odnos glavnih napona

$$m = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad (6.28.)$$

(pri čemu treba imati u vidu da je uopšte $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) dobija se

$$\varphi_2 = \frac{d_2^*}{d_1^*} \varphi_1 = \frac{\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3}}{\sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3}} \varphi_1 = \frac{2m-1}{2-m} \varphi_1$$

$$m = \frac{2\varphi_2 + \varphi_1}{2\varphi_1 + \varphi_2} \quad (6.29.)$$

To istovremeno znači da se odnos glavnih napona pri deformisanju može indirektno odrediti preko ostvarenih površinskih deformacija u pravcu istih osa — praktično merenjem dijagonala elipse d_1 i d_2 i izračunavanjem na osnovu njih φ_1 i φ_2 .

Uvodeći u analizu ekvivalentnu deformaciju (kao invarijantnu veličinu) i uzimajući u obzir uslov o nepromenljivosti zapremine ($\varphi_3 = -\varphi_1 - \varphi_2$) dolazi se do sledećih odnosa [80]:

$$\varphi_e = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + (\varphi_2 - \varphi_3)^2 + (\varphi_3 - \varphi_1)^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_1 \varphi_2 + \varphi_2^2} = \frac{2\sqrt{1-m+m^2}}{2-m} \varphi_1$$

$$\varphi_1 = \frac{2-m}{2\sqrt{1-m+m^2}} \varphi_e = \psi_1(m) \varphi_e \quad (6.30.)$$

$$\varphi_2 = \frac{2m-1}{2\sqrt{1-m+m^2}} \varphi_e = \psi_2(m) \varphi_e \quad (6.31.)$$

$$-\varphi_3 = \frac{m+1}{2\sqrt{1-m+m^2}} \varphi_e = \psi_3(m) \varphi_e \quad (6.32.)$$

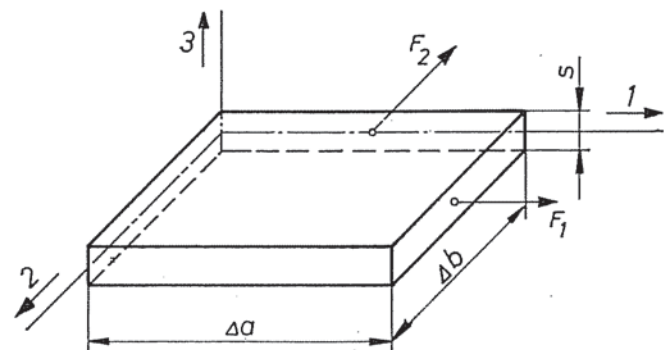
Radi uspostavljanja potrebnih naponsko-deformacionih veza posmatraće se jedan mali element od tankog lima ($\Delta a \times \Delta b \times s$) izdvojen iz nekog većeg otpreska (sl. 92.), s tim da na njega deluju sile F_1 i F_2 u pravcu glavnih normalnih napona σ_1 i σ_2 ($\sigma_3 = 0$).

S obzirom na usvojene oznake, može se pisati

$$F_1 = \sigma_1 \Delta b s$$

$$F_2 = \sigma_2 \Delta a s$$

Proces plastičnog deformisanja dovodi, sa jedne strane, do porasta ovih sila usled deformacionog očvršćavanja, a sa druge, do njihovog opadanja usled smanjenja površine preseka na koji one deluju. Ipak, u konačnom rezultatu svaka od tih sila raste u početnom periodu procesa, jer je tada uticaj deformacionog očvršćavanja materijala dominantniji. Međutim, u trenutku kada ma koja od njih dostigne svoj maksimalni iznos, proces će početi da postaje nestabilan, tj. nastaće lokalizacija daljeg deformisanja. Ukoliko se taj trenutak usvoji kao granica do koje se sme dopustiti deformisanje pri obradi, onda će biti od posebnog interesa da se ona bliže odredi.



Sl. 92. Element lima napregnut dvoosnim naprezanjem u njegovoj ravni

Da bi proces deformisanja bio stabilan (ravnomeran) moraju, dakle, biti ispunjena sledeća dva uslova:

$$dF_1 \geq 0 \quad (6.33.a)$$

$$dF_2 \geq 0 \quad (6.33.b)$$

(jer $dF_1 = 0$ ili $dF_2 = 0$ znači uslov dostizanja maksimuma te funkcije).

Ako se pretpostavi da je $|\sigma_1| > |\sigma_2|$, onda će svoj maksimum dostići najpre sila F_1 , pa će se zato razmatrati odnosi koji obezbeđuju da bude zadovoljen prvi od prednja dva uslova (drugi će pri tome biti automatski zadovoljen). U razvijenom obliku taj uslov će biti

$$\Delta b s d\sigma_1 + \sigma_1 s d(\Delta b) + \sigma_1 \Delta b d s \geq 0$$

odnosno, posle deljenja sa $\sigma_1 \Delta b s$

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} + \frac{d(\Delta b)}{\Delta b} + \frac{ds}{s} \geq 0$$

ili

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} + d\varphi_2 + d\varphi_3 \geq 0$$

Kako je zbog pretpostavke o nepromenljivosti zapremine

$$d\varphi_3 = -d\varphi_1 - d\varphi_2$$

biće

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} \geq d\varphi_1 \quad (6.34.a)$$

Jasno je da će za slučaj $\sigma_1 = \sigma_2$ biti takođe

$$\frac{d\sigma_2}{\sigma_2} \geq d\varphi_2 \quad (3.34.b)$$

Pišući umesto m (kojeg od ovih napona, na primer σ_1 , simbol za deformacionu čvrstoću K (što proizilazi iz činjenice da je ona za slučaj ravnomernog jednoosnog naprezanja jednaka stvarnom naponu u materijalu σ) i izjednačujući izraz sa nulom, dobija se odnos karakterističan za kritičan trenutak početka lokalizacije (označen indeksom M):

$$\left(\frac{dK}{K} \right)_M = d\varphi_{1M} \quad (6.35.)$$

Sa druge strane, stvarna zavisnost između deformacione čvrstoće i odgovarajuće ekvivalentne deformacije (φ_e) može se prema ranije izloženom (5.44.), u mnogo slučajeva aproksimirati izrazom

$$K = \sigma_e = C \varphi_e^n$$

što se za slučaj jednoosnog naprezanja svodi na

$$K = \sigma_1 = C \varphi_1^n$$

*) Svođenje veze (6.34.a) na odnos ekvivalentnih napona može se takođe izvršiti na taj način što će se u jednačinu (2.44.a) uvesti m i staviti $\sigma_3 = 0$, posle čega se dobija: $\sigma_e = \sigma_1 \sqrt{1 - m + m^2}$ odnosno

$$d\sigma_e = d\sigma_1 \sqrt{1 - m + m^2}$$

$$\text{i konačno } \frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = \frac{d\sigma_e}{\sigma_e} = \frac{dK}{K}$$

Ranije je pokazano (5.48.) da je u ovom slučaju $\varphi_{1M} = n$. Međutim, odnosi za m koji slučaj mogu se dobiti ako se gornja jednačina diferencira i uzme u obzir (6.30.), tj.

$$d\sigma_e = Cn \varphi_e^{n-1} d\varphi_e$$

$$\frac{d\sigma_e}{\sigma_e} = \frac{Cn \varphi_e^{n-1} d\varphi_e}{C \varphi_e^n} = \frac{nd\varphi_e}{\varphi_e}$$

$$\frac{d\sigma_e}{d\varphi_e} = \sigma_e \frac{n}{\varphi_e} = \sigma_e \frac{\varphi_{1M}}{\varphi_e} = \sigma_e \psi_1(m)$$

To istovremeno znači da će uslov stabilnosti procesa biti

$$\frac{d\sigma_e}{d\varphi_e} \geq \sigma_e \psi_1(m) \quad (6.36.)$$

ili

$$\frac{n}{\varphi_e} \geq \psi(m) \quad (6.37.)$$

i konačno

$$\varphi_{eM} \leq \frac{n}{\psi_1(m)} = \frac{2\sqrt{1 - m + m^2}}{2 - m} n \quad (6.38.)$$

Dakle, da ne bi došlo do lokalizovanja deformisanja mora biti ispunjen uslov

$$\varphi_e \leq \varphi_{eM} \quad (6.39.)$$

Uzimajući u obzir ove relacije, kao i prednje opšte zavisnosti između pojedinih glavnih deformacija i ekvivalentne deformacije (6.30.—6.32.), mogu se njihovi kritični iznosi izraziti kao

$$\varphi_{1M} = n \quad (6.40.a)$$

$$\varphi_{2M} = \frac{2m - 1}{2 - m} n \quad (6.40.b)$$

$$\varphi_{3M} = \frac{m + 1}{2 - m} n \quad (6.40.c)$$

Očigledno je da granična (kritična) deformacija ne zavisi samo od svojstava materijala (koja se odražavaju preko eksponen-

ta n), već takođe i od karaktera naponskog stanja (određenog odnosom m). Lako se može uočiti da će φ_{eM} imati najveću vrednost $\varphi_{eM} = 2n$ pri $m = 1$, tj. u slučaju ravnomernog dvoosnog zatezanja ($\varphi_{3M} = -2n$). Pri jednoosnom zatezanju biće $\sigma_2 = 0$, tj. $m = 0$ i $\varphi_{eM} = n$, a $\varphi_{3M} = -n/2$.

To znači da će lim do lokalizovanja deformisanja moći da se stani pri ravnomernom dvoosnom zatezanju četiri puta više nego pri jednoosnom zatezanju.

Pri ovome se stalno mora imati u vidu da navedeni odnosi važe samo uz učinjenu pretpostavku da se ni pravci glavnih osa, ni odnos m , ne menjaju u toku deformisanja (proporcionalno naprezanje). Osim toga, ovakva šema deformisanja (v. sl. 92.) pri izvlačenju različitih delova od lima karakteristična je za zone koje su dovoljno udaljene od ivice matrice alata.

U okolini same ivice matrice, međutim, mora se poći od činjenice da se širina posmatranog elementa, izloženog sili, praktično ne menja ($d(\Delta b) = 0$), pa se posle diferenciranja izraza za silu dobija

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} \geq -d\varphi_3$$

Zbog toga je takođe

$$\frac{d\sigma_e}{\sigma_e} \geq \psi_3(m)d\varphi_e$$

odnosno

$$\varphi_{eM} = \frac{n}{\psi_3(m)} = \frac{2\sqrt{1-m+m^2}}{m+1}n \quad (6.41.)$$

Na osnovu toga, može se pisati da će kritični iznosi pojedinih deformacija u blizini ivice matrice biti:

$$\varphi_{1M} = \frac{2-m}{m+1}n \quad (6.42.a)$$

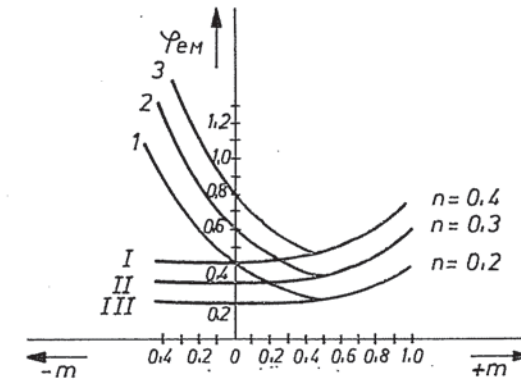
$$\varphi_{2M} = \frac{2m-1}{m+1}n \quad (6.42.b)$$

$$-\varphi_{3M} = n \quad (6.42.c)$$

Vidi se da će pri $m = -1$, φ_{1M} i φ_{2M} dobiti beskonačne iznose, što praktično znači da se nestabilno deformisanje neće ni pojaviti, već će se materijal deformisati stabilno sve do potpunog iscrpljenja plastičnosti, odnosno do razaranja (tzv. »puna plastičnost«).

Drugim rečima, da bi se vrednosti dobijene na osnovu ovih izraza mogle da ostvare, mora i plastičnost metala biti dovoljna. U protivnom, one gube realan smisao.

Izvedene zavisnosti $\varphi_{eM} = \varphi_{eM}(n, m)$ za oba slučaja prikazane su grafički na sl. 93. gde krive I, II i III odgovaraju prvom slučaju (za zone udaljene od ivice matrice), a 1, 2, 3 drugom. Lako je uočiti da se funkcija $\psi_1(m)$ ne menja znatnije za



Sl. 93. Zavisnost $\varphi_{eM} = \varphi_{e(M)}(m, n)$

vrednosti $m > 0,5$ i da je, prema tome, uticaj naponskog stanja na iznos kritične ekvivalentne deformacije neznan. Ovo ima određen praktičan značaj s obzirom da se odnos m u toku samog procesa najčešće menja u izvesnoj meri, pa se ta promena može bez primetnije greške zanemariti u oblasti $m < 0,5$. Međutim, u oblasti $m > 0,5$ proces bi trebalo podeliti u više faza tako da se u okviru svake od njih može praktično smatrati da je $m \approx \text{const.}$, tj. da je naprezanje proporcionalno (prosto) i time omogućiti primena navedenih odnosa. Napominje se da pri eksperimentalnim analizama podela procesa na više etapa i inače dolazi u obzir, jer često pretpostavku o proporcionalnom naprezanju treba proveriti (proveravanje održavanja odnosa m , kao i pravaca glavnih osa).

Praktična pogodnost ovako definisanih graničnih odnosa ogleda se i u tome što je eksperimentalnim iznalaženjem stvarnih iznosa deformacija na kritičnim mestima otpresaka i njihovim upoređenjem sa ovim kritičnim vrednostima, moguće dobiti kvantitativno izraženu meru sigurnosti, odnosno kritičnosti deformisanja (ukoliko je razlika između kritičnih i stvarno postojećih deformacija veća, utoliko je veća i sigurnost obrade, tj. manja moguć-

nost da usled eventualnih kolebanja proizvodnih uslova dođe do razaranja lima na kritičnom mestu).

U ovom smislu Томленов [80] je predložio koeficijent iskorišćenja plastičnosti u obliku:

$$\eta = \frac{\varphi_e}{\varphi_{eM}} \leq 1 \quad (6.43)$$

ili njegovu recipročnu vrednost (koef. rezerve plastičnosti):

$$\xi = \frac{\varphi_{eM}}{\varphi_e} \geq 1$$

Međutim, ako se ovi koeficijenti izraze preko napred izvedenih izraza, dobija se, na primer za ξ :

$$\xi = \frac{n}{\varphi_1} \frac{\psi_1(m)}{\psi_1(m)} = \frac{n}{\varphi_1} \quad (6.44)$$

što znači da je ovakav pokazatelj nezavistan od karakteristike naponskog stanja m . To istovremeno znači da bi se on mogao koristiti za uporednu ocenu stepena kritičnosti deformacije na kritičnom mestu otpreska samo ukoliko se podrazumeva konstantna vrednost za m (na primer, isti odnos m na dva različita mesta, ili na kritičnim mestima dva različita otpreska).

Iz ovog razloga autor je predložio [12] nešto izmenjen oblik ovog pokazatelja:

$$\begin{aligned} \omega &= \varphi_{eM} - \varphi_e = \frac{n - \varphi_1}{\psi_1(m)} \\ &= \frac{2\sqrt{1-m+m^2}}{2-m} (n - \varphi_1) = \psi_1'(m) (n - \varphi_1) \end{aligned} \quad (6.45)$$

Time je izbegnut pomenuti nedostatak koeficijenata η i ξ (jer je zavisnost od m zadržana).

Primer: upoređiće se stepen kritičnosti deformacije u dva različita slučaja i to za: a) jednoosno zatezanje ($m = 0$) i b) ravnomerno dvoosno zatezanje ($m = 1$). Neka je merenjem deformacija elemenata merne mreže ustanovljeno da je u prvom slučaju $\eta_1 = 0,85$, odn. $\xi_1 = 1,176$; a u drugom $\eta_2 = 0,90$, odn. $\xi_2 = 1,11$.

Zbog $\xi_1 > \xi_2$ moglo bi se zaključiti da je u drugom slučaju materijal bliži kritičnoj granici početka nestabilnog deformisanja, pa bi se taj slučaj mogao smatrati kritičnijim od prvog. Međutim, upoređenje pomoću pokazatelja ω vodi sasvim drugom zaključku, jer je

a) za $m = 0$:

$$\psi_1'(m) = 1$$

$$\omega_1 = \psi_1'(m) (n - \varphi_2) = n - \frac{n}{\xi_1} = 0,15n$$

b) za $m = 1$:

$$\psi_1'(m) = 2$$

$$\omega_2 = \psi_1'(m) (n - \varphi_1) = 2 \left(n - \frac{n}{\xi_2} \right) = 0,20n$$

Dakle, preostala rezerva plastičnosti u drugom slučaju je ipak veća, zbog čega je on manje kritičan.

S obzirom na prethodne zaključke, o ovoj okolnosti (pogodnosti i opravdanosti pokazatelja η , ξ , ω) treba naročito voditi računa pri većim iznosima m ($m > 0,5$), dok su razlike usled korišćenja koeficijenata η i ξ umesto ω pri $m < 0,5$ neznatne.

Najzad, treba napomenuti da su novija saznanja pokazala da teorijski odnosi 6.40 i sl. praktično nisu sasvim zadovoljeni. Naime, u uslovima dvoosnog zatezanja u ravni lima može se praktično ostvariti maksimalna deformacija φ_1 koja je veća od n , tj. stabilno deformisanje nije pri takvoj naponskoj šemi strogo ograničeno uslovom $\varphi_{1M} = n$. Međutim, to je već specijalna problematika, vezana za izučavanje tzv. »difuzne« i nagle lokalizacije deformisanja limova, pa se u nju na ovom mestu neće zalaziti.